Карпатський національний університет імені Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та інформатики і методики навчання

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти
на тему:

“ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ СТАРШИХ КЛАСІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ЛОГАРИФМІВ”

Виконала:
магістрантка групи СОМ(М)(з)-21
спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)

Лешко В.В.

Керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Заторський Р.А.

Рецензент _____
(науковий ступінь, вчене звання, посада прізвище та ініціали)

Івано-Франківськ – 2025 р.

Карпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та інформатики і методики навчання
Освітній рівень «магістр»
Спеціальність 014.09 Середня освіта (Інформатика)

Затверджено на засіданні кафедри
математики та інформатики і
методики навчання
Протокол №___від_____
Завідувач кафедри__Кульчицька Н.В.

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ
Лешко Вікторії Василівні
(прізвище, ім'я, по батькові)

Тема роботи «Формування математичної компетентності учнів старших класів під час вивчення логарифмів»

1. Керівник роботи д. фіз.-мат. наук, проф. Заторський Роман Андрійович
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)
2. Перелік питань, які потрібно розробити: аналіз методологічних та дидактичних вимог до формування математичної компетентності під час вивчення логарифмів; моделювання методики й системи навчальних завдань для розвитку компетентностей учнів; апробація запропонованої методики та оцінювання її ефективності у навчальному процесі.
3. Дата видачі завдання 21 жовтня 2024 року

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Дослідження стану питання в науці та практиці	21.10.2024р.-28.20.2024р.	
2.	Обґрунтування актуальності магістерського дослідження	29.10.2024р.-22.11.2024р.	
3.	Аналіз методологічних, психолого-педагогічних та дидактичних вимог до навчання логарифмів	25.11.2024р.-06.02.2025р.	
4.	Проведення діагностичного опитування серед учнів та вчителів і аналіз результатів	06.02.2025р.-07.03.2025р.	
5.	Дослідження методичних підходів і моделювання методики формування математичної компетентності	10.03.2025р.-23.04.2025р.	
6.	Практична реалізація методики та її апробація	24.04.2025р.-08.09.2025р.	
7.	Аналіз результатів експериментальної перевірки ефективності методики	09.09.2025р.-16.09.2025р.	
8.	Оформлення результатів магістерського дослідження	09.09.2025р.-30.11.2025р.	
9.	Підготовка матеріалів до захисту дипломної роботи	03.12.2025р.-19.12.2025р.	

Студент _____ Лешко В.В.
(підпис) (прізвище та ініціали)

Керівник роботи _____ Заторський Р.А.
(підпис) (прізвище та ініціали)

АНОТАЦІЯ

до магістерської роботи
за спеціальністю “Середня освіта (Математика)”
«Формування математичної компетентності учнів старших класів під час вивчення логарифмів»
Лешко Вікторії Василівни

Об’єкт дослідження – процес формування математичної компетентності учнів старшої школи під час вивчення логарифмів.

Мета роботи – розроблення та впровадження методики формування математичної компетентності старшокласників у процесі вивчення логарифмів з урахуванням сучасних дидактичних, психологічних та методологічних вимог.

У роботі проаналізовано сучасні підходи до визначення математичної компетентності, досліджено зміст і труднощі вивчення логарифмів, визначено дидактичні вимоги та узагальнено існуючі методики. Розроблено модель навчання логарифмів, що включає систему інтерактивних і компетентнісно орієнтованих завдань.

Проведено педагогічний експеримент щодо впровадження методики на уроках алгебри в 11 класі. Оцінено динаміку сформованості математичної компетентності учнів, підтверджено ефективність використання інтерактивних матеріалів та диференційованих завдань. Подано рекомендації для практичного застосування методики.

Роботу апробовано на XI Міжнародній науково-методичній конференції «Проблеми математичної освіти ПМО-2025» (м. Черкаси) у 2025 році. За результатами апробації видано сертифікат учасника та опубліковано тези у збірнику матеріалів конференції.

Ключові слова: математична компетентність, логарифми, старша школа, методика навчання, інтерактивні завдання, педагогічний експеримент.

SUMMARY
of master's thesis
on specialty «Secondary education (Mathematics)»
"Formation of Mathematical Competence of High School Students in the Process of Learning Logarithms"
Viktoriia Leshko

The object of the research is the process of forming mathematical competence of high school students during the study of logarithms.

The purpose of the work is to develop and implement a methodology for forming mathematical competence of senior students in the process of learning logarithms, taking into account modern didactic, psychological and methodological requirements.

The thesis analyzes contemporary approaches to defining mathematical competence, examines the content and difficulties of learning logarithms, identifies didactic requirements, and summarizes existing teaching methods. A model of teaching logarithms has been developed, which includes a system of interactive and competence-oriented tasks.

A pedagogical experiment was conducted to test the methodology in Grade 11 algebra lessons. The dynamics of students' mathematical competence formation were assessed, confirming the effectiveness of using interactive materials and differentiated tasks. Recommendations for practical application of the methodology are provided.

The work was tested at the XI International Scientific and Methodological Conference "Problems of Mathematics Education PMO-2025" (Cherkasy) in 2025. As a result of the testing, a participant certificate was issued and the abstracts were published in the conference proceedings.

Keywords: mathematical competence, logarithms, high school, teaching methodology, interactive tasks, pedagogical experiment.

ЗМІСТ

ВСТУП 6

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ СТАРШИХ КЛАСІВ 9

1.1. Поняття математичної компетентності та її складові 9

1.2. Особливості навчання логарифмів в старших класах 15

1.3. Методи та підходи до формування математичної компетентності в процесі навчання логарифмів 23

Висновки до першого розділу 29

РОЗДІЛ 2. РОЗРОБКА МЕТОДИКИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ЛОГАРИФМІВ 31

2.1 Аналіз існуючих методичних підходів до вивчення логарифмів у школах 31

2.2 Розробка методики формування математичної компетентності при вивченні логарифмів 36

2.3 Роль учителя в процесі формування математичної компетентності учнів при вивченні логарифмів 41

Висновки до другого розділу 44

РОЗДІЛ 3. АПРОБАЦІЯ МЕТОДИКИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ЛОГАРИФМІВ 45

3.1 Опис проведеного експерименту 45

3.2 Аналіз результатів досягнень учнів після проведеної методики 51

Висновки до третього розділу 70

ВИСНОВКИ 72

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 76

ДОДАТКИ 80

ВСТУП

Актуальність теми. У контексті модернізації освітньої системи України та інтеграції в глобальний освітній простір, підвищення математичної компетентності учнів набуває особливої ваги. Математика, як універсальна наука, є основою для розвитку критичного мислення та логічних здібностей, що необхідні для успішного функціонування в сучасному інформаційному суспільстві. Особливо важливим є забезпечення якісної математичної підготовки учнів у старшій школі, де вони зустрічаються з абстрактними та складними математичними концепціями.

Логарифм є одним з основних інструментів для розв’язання задач у різних галузях науки та технологій, таких як економіка, фізика та інформаційні технології. Вивчення логарифмів є важливим етапом загальної математичної освіти, оскільки воно не лише забезпечує розуміння абстрактних концептів, але й відкриває можливості для застосування отриманих знань у практиці. Логарифми допомагають учням формувати аналітичне мислення та глибше засвоювати інші дисципліни, такі як фізика та економіка.

Для забезпечення здатності учнів ефективно опановувати теоретичний матеріал і застосовувати його на практиці необхідно розробити сучасну методику формування математичної компетентності. Вона повинна включати інтерактивні методи навчання, використання мультимедійних ресурсів, онлайн-завдань та проектної діяльності, що стимулює критичне мислення та самостійний пошук рішень.

Наявність суперечностей у сучасних підходах до вивчення логарифмів у шкільній програмі, зокрема акцент на механічне запам'ятовування формул і теорем, свідчить про необхідність вдосконалення методики навчання цього важливого математичного інструмента. Це дослідження спрямоване на розробку нових, інноваційних підходів, які покращать якість математичної освіти в Україні.

Питання формування математичної компетентності під час вивченя логарифмів досліджувалося різними вченами. Так М. Головань, Г. Захарова, К. Лемешко, М. Леонтян, О. Локшина, І. Сафонова, С. Раков, С. Шпак, та інші досліджували поняття «компетентність» та «математична компетентність». А. Гебель, І. Колєбанова, А. Мартинова, В. Нечипоренко, А. Прус, Л. Соколенко, В. Швець та інші присвятили свої праці методиці вивчення логарифмів у старшій школі.

Мета дослідження полягає в розробці методики формування математичної компетентності учнів старших класів під час вивчення логарифмів, зокрема у контексті сучасних педагогічних підходів, інтерактивних методів та диференційованих завдань.

Для досягнення цієї мети необхідно розв'язати ряд **завдань**, а саме:

1. Розглянути основні поняття математичної компетентності.
2. Дослідити особливості навчання логарифмів у старших класах.
3. Систематизувати існуючі методичні підходи до вивчення логарифмів.
4. Створити методику формування математичної компетентності при вивченні логарифмів.
5. Розробити рекомендації для учителів щодо формування математичної компетентності у 11 класі під час вивчення логарифмів.
6. Перевірити ефективність розробленої методики на уроках алгебри у 11 класі.

Об'єктом дослідження є процес формування математичної компетентності учнів старших класів.

Предметом дослідження є методологія формування математичної компетентності учнів старших класів під час вивчення логарифмів.

Методи дослідження включають аналіз нормативно-правової бази освіти, порівняльний аналіз існуючих методичних підходів до навчання логарифмів, а також апробацію розробленої методики через експериментальне дослідження.

Наукова новизна дослідження полягає в розробці нової методики формування математичної компетентності учнів у процесі вивчення логарифмів, що поєднує традиційні та інноваційні методи навчання, а також інтегрує міжпредметні зв'язки. Вперше запропоновано комплексний підхід до використання мультимедійних ресурсів та інтерактивних технологій для розвитку критичного мислення учнів.

Практичне значення отриманих результатів полягає в розробці конкретних рекомендацій для вчителів з формування математичної компетентності учнів, а також створенні методичних матеріалів і конспектів уроків, які можуть бути використані на практиці для покращення процесу навчання логарифмів у старшій школі.

Апробація результатів роботи. Роботу апробовано на XI Міжнародній науково-методичній конференції «Проблеми математичної освіти ПМО-2025» (м. Черкаси) у 2025 році. За результатами апробації видано сертифікат учасника та опубліковано тези у збірнику матеріалів конференції.

Структура дипломної роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів (у тому числі 8-ми підрозділів), висновків, списку використаних джерел (33 найменування) та 6 додатків. Загальний обсяг дослідження – 109 сторінки (з них основна частина – 70 сторінки).

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ СТАРШИХ КЛАСІВ

1.1. Поняття математичної компетентності та її складові

Аналіз психолого-педагогічної та науково-методичної літератури показує, що питання компетентнісного підходу у вивченні математики є предметом уваги як українських, так і зарубіжних дослідників. При цьому автори по-різному акцентують увагу на структурі та складових компетентності, але в більшості визначень присутні такі спільні елементи, як поєднання знань, умінь, навичок та особистісних якостей, а також готовність до застосування математики в реальних ситуаціях (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Порівняльний аналіз підходів до визначення математичної компетентності

Автор	Визначення
М. Леонтян	Сукупність знань, умінь, навичок та особистісних якостей, які людина набуває не лише в процесі формальної освіти, а й через неформальне навчання та вплив навколишнього середовища.
М. Головань	Комплекс знань і навичок, які є необхідними для успішного виконання професійної діяльності, зокрема вміння аналізувати, прогнозувати результати діяльності та ефективно використовувати інформацію.
С. Шпак	Комплексна особистісна характеристика, що базується на поєднанні основних математичних знань, практичних умінь і навичок, які демонструють готовність і здатність учня до виконання професійної діяльності.
О. Локшина	Вміння використовувати операції додавання, віднімання, множення, ділення та пропорції для виконання обчислень у повсякденних ситуаціях як усно, так і письмово. Охоплює здатність і бажання застосовувати математичні методи мислення, такі як логічне та просторове, а також використовувати математичні інструменти для викладу.
С. Раков	Визначається через рівні навчальних досягнень, що включають математичне мислення, аргументацію, математичне моделювання; постановку та розв'язування задач, представлення даних; маніпулювання математичними конструкціями; комунікацію в математичному контексті; використання математичних інструментів.

Джерело: [15; 13; 33; 32; 26].

М. Леонтян [15, с. 74] розглядає компетентність у навчанні як сукупність знань, умінь, навичок та особистісних якостей, що формуються як у процесі

формальної освіти, так і в неформальному навчанні та взаємодії з навколишнім середовищем. Важливо, що компетентність розуміється не лише як «знання про щось», а як здатність діяти на основі цих знань, вирішуючи реальні задачі у відповідній сфері. Отже, вона має комплексний характер і включає практичний досвід, уміння переносити засвоєне на нові ситуації, що в математиці проявляється, зокрема, у вмінні використовувати формули та алгоритми не тільки в типових, а й у змінених, контекстних задачах.

М. Головань [13] підкреслює професійну спрямованість компетентності, розглядаючи її як комплекс знань і навичок, необхідних для успішного виконання професійної діяльності, зокрема для аналізу, прогнозування результатів та ефективного використання інформації. У математичній освіті це означає, що учень має не лише «вміти порахувати», а й уміти інтерпретувати числові результати, робити висновки, моделювати ситуації. Наприклад, при вивченні логарифмів учень, який володіє відповідним рівнем компетентності, не просто обчислює $\log_2 8$, а й розуміє, що це показник степеня, до якого треба піднести основу 2, щоб отримати 8, тобто розпізнає за означенням, що $\log_2 8 = 3$, бо $2^3 = 8$.

На думку С. Шпака [33], математична компетентність – це комплексна особистісна характеристика, що ґрунтується на поєднанні базових математичних знань, практичних умінь і навичок, які демонструють готовність і здатність до виконання професійної діяльності. Це визначення акцентує на цілісності: математична компетентність – не набір окремих формул, а система, де знання про логарифми, наприклад, пов'язані з умінням будувати й аналізувати графіки функцій $y = \log_a x$, розв'язувати рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ та тлумачити отримані розв'язки в прикладних задачах.

Окремий підхід пропонується в роботах, де математична компетентність описується як уміння бачити математику в навколишньому світі, створювати математичні моделі для опису об'єктів, явищ і процесів, а також застосовувати математичні знання для розв'язання навчальних і практичних задач [7]. Це

особливо важливо для теми логарифмів, оскільки саме через моделювання учні бачать сенс введення логарифмічної функції. Наприклад, рівняння:

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+] \tag{1.1}$$

дозволяє описати кислотність розчину в стиснутому масштабі: невелика зміна показника pH відповідає значній зміні концентрації іонів Гідрогену. Таким чином, логарифм виступає інструментом моделювання, а вміння працювати з ним є конкретним проявом математичної компетентності.

Згідно з О. Локшиною [32, с. 189], математична компетентність включає вміння використовувати операції додавання, віднімання, множення, ділення та пропорції для виконання обчислень у повсякденних ситуаціях (усно й письмово), а також здатність і бажання застосовувати логічне та просторове мислення, використовувати математичні інструменти (формули, моделі, графіки, діаграми). У контексті логарифмів це проявляється, наприклад, у вмінні застосовувати властивості логарифмів:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,\ \log_a \mathrm{x}^{\mathrm{k}} = \mathrm{k}\log_a \mathrm{x} \tag{1.2}$$

для спрощення виразів і розв’язування рівнянь, а також у розумінні графіків функцій $\log_a x^k = k\log_a x$ та їхнього зв’язку зі степеневими функціями.

У Державному стандарті початкової освіти (2018 р.) математична компетентність розглядається як одна з ключових, а метою математичної освітньої галузі названо розвиток мислення, здатності розпізнавати та моделювати ситуації з реального життя, що можуть бути розв’язані математичними методами, і здатності здійснювати усвідомлений вибір [26]. Хоча йдеться про молодший шкільний вік, саме тут закладається основа для подальшого вивчення більш складних тем, зокрема логарифмів у старшій школі: учні вчаться переносити реальні ситуації (зміна величин, зростання, зменшення) у математичні моделі й інтерпретувати результати обчислень.

М. Головань [8, с. 35] зазначає, що поняття «математична компетентність» у педагогічній науці розглядається з кількох перспектив: як характеристика особистості, що поєднує математичну грамотність і досвід самостійної математичної діяльності; як комплексна особистісна риса на основі сукупності знань, умінь і навичок; як поєднання знань, досвіду й здібностей для розв'язання проблем; як готовність до вивчення дисциплін, що вимагають математичної підготовки; як здатність до математичного моделювання реальних ситуацій та оцінювання похибок; як системна характеристика, що відображає глибоке знання, досвід і спрямованість на розвиток. І. Зіненко [12] конкретизує, що йдеться про мотиваційно-ціннісні, когнітивні, операційно-технологічні та рефлексивні компоненти, які в сукупності забезпечують повноцінну математичну діяльність.

Г. Захарова, К. Лемешко [11] та І. Сафонова [29, с. 400] виокремлюють п'ять основних компонентів математичної компетентності: мотиваційний, когнітивний, діяльнісний, ціннісно-рефлексивний та емоційно-вольовий [14]. У подальшій роботі ці компоненти доцільно розглядати не лише описово, а й як елементи моделі, яку можна кількісно оцінити в процесі формування компетентності при вивченні логарифмів у старших класах.

Позначимо через Mмотиваційний компонент (інтерес, внутрішні мотиви, цілі вивчення математики), через K– когнітивний (система знань про логарифми, їх означення та властивості), через D – діяльнісний (уміння розв'язувати логарифмічні рівняння, нерівності, прикладні задачі), через R – ціннісно-рефлексивний (ставлення до математики, уміння аналізувати власні помилки), через E – емоційно-вольовий (стійкість до труднощів, наполегливість). Нормуючи ці показники на відрізку [0;1], загальний рівень математичної компетентності учня можна подати у вигляді інтегрального показника

$$C = w_M M + w_K K + w_D D + w_R R + w_E E, \quad w_M + w_K + w_D + w_R + w_E = 1 \qquad (1.3)$$

де $w_M,\ldots,w_E$– вагові коефіцієнти, що відображають значущість відповідних компонентів. Для теми логарифмів у старшій школі природно надати більшої ваги когнітивному та діяльнісному компонентам (наприклад, w_K=0.35, w_D=0.25, але не ігнорувати мотиваційний та рефлексивний складники, оскільки без внутрішньої мотивації та здатності аналізувати власні дії стійка компетентність не формується.

Для діяльнісного складника D можна ввести простий операційний індикатор, пов'язаний із розв'язанням логарифмічних задач. Нехай n – кількість запропонованих задач з логарифмами, k – кількість правильно розв'язаних задач, тоді

$$D_{\text{успіх}} = \frac{k}{n} \tag{1.5}$$

Якщо, наприклад, учень правильно розв'язав 7 із 10 задач на властивості логарифмів та логарифмічні рівняння, маємо $D_{\text{успіх}}$=0.7, що може бути використано як частина загальної оцінки діяльнісного компонента.

Ціннісно-рефлексивний компонент R проявляється в тому, наскільки учень здатний усвідомлювати власні помилки. Наприклад, розв'язуючи рівняння

$$\log_3(x-2) + \log_3 x = 2 \tag{1.6}$$

учень отримує квадратне рівняння $x^2 - 2x - 9 = 0$ і далі $x = 1 \pm \sqrt{10}$. Рефлексивно-ціннісна складова виявляється в умінні перевірити розв'язки з урахуванням області визначення логарифмічних виразів $x > 0,\ \ x - 2 > 0$, відкинути $x = 1 - \sqrt{10} < 0$ і залишити єдиний допустимий розв'язок $x = 1 + \sqrt{10}$. Тут важлива не лише технічна правильність, а й усвідомлення значущості перевірки результату.

С. Раков [25, с. 15] пропонує розглядати зміст математичної компетентності через такі складові, як процедурна, логічна, технологічна,

дослідницька та методологічна компетентності. Процедурна компетентність проявляється у вмінні розв'язувати стандартні задачі за відомими алгоритмами (наприклад, обчислення $\log_2 0.125$ через перехід до степеня: $0.125 = 2^{-3}$, отже $\log_2 0.125 = -3$). Логічна компетентність пов'язана з умінням будувати логічні міркування та доведення, зокрема доводити формули на кшталт

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a > 0, \ \neq 1, \ > 0, \tag{1.7}$$

або обґрунтовувати взаємозв'язок між степеневою та логарифмічною функціями. Технологічна компетентність передбачає використання ІКТ для побудови графіків логарифмічних функцій, дослідження їхніх властивостей, моделювання процесів зі зростанням/спаданням, близьким до експоненціального чи логарифмічного. Дослідницька та методологічна компетентності пов'язані з умінням ставити запитання, будувати математичні моделі реальних ситуацій (наприклад, зростання населення, розпад речовин, вимірювання інтенсивності звуку за формулою

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0}\right), \tag{1.8}$$

аналізувати обмеження моделі та доцільність використання саме логарифмічної залежності. Отже, математична компетентність постає як багатовимірне явище, що включає взаємопов'язані знання, уміння, навички та особистісні якості, необхідні для успішної математичної діяльності. У контексті старшої школи та вивчення логарифмів вона проявляється в здатності розуміти означення й властивості логарифмів, виконувати обчислення та перетворення, будувати й аналізувати математичні моделі реальних процесів, критично ставитися до власних результатів і долати труднощі в розв'язуванні нестандартних задач. Запропоноване розуміння та модель компонентів математичної компетентності надалі слугуватимуть основою для розробки курсу

з теми логарифмів (розділ 2) та його експериментальної перевірки у старших класах (розділ 3).

1.2. Особливості навчання логарифмів в старших класах

Математичні поняття історично виникали як відповідь на практичні потреби, і логарифми не є винятком. Уже на початку XVII ст. науковці та інженери стикалися з великою кількістю обчислень, пов'язаних із множенням, діленням, піднесенням до степеня. Шотландський математик Дж. Непер (1550–1617) увів термін «логарифм» і створив перші логарифмічні таблиці, які дозволяли замінювати операції множення та ділення додаванням і відніманням, використовуючи тотожність

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \tag{1.9}$$

Наприклад, замість множити 125·40 вручну, використовували таблиці логарифмів: знаходили $\log_{10}125$ і $\log_{10}40$, додавали їх, а потім за таблицею знаходили число, логарифм якого дорівнює сумі. Це суттєво пришвидшувало обчислення й стало підґрунтям для розвитку астрономії, навігації, інженерії [31, с. 1–2].

Паралельно зі створенням таблиць логарифмів швейцарський математик Й. Бюргі (1552–1623) незалежно від Непера розробив власні таблиці, що містили значення логарифмів для великої кількості чисел. На їх основі з'явилися логарифмічні лінійки – механічні обчислювальні пристрої, які реалізували ідею переходу від множення до додавання. Логарифмічні лінійки використовувалися аж до появи електронних калькуляторів. Німецький математик Н. Меркатор (1620–1687) увів поняття натурального логарифма (логарифма з основою e), який сьогодні є базовим у математичному аналізі. Отже, логарифми історично були інструментом оптимізації обчислень, а в шкільному курсі – ще й засобом формування математичного мислення та компетентностей.

Логарифмічна функція входить до змісту курсу алгебри та початків аналізу в 11 класі на стандартному/базовому та профільному рівнях (див. додаток А). Зміст і глибина її вивчення відрізняються залежно від рівня підготовки, що узагальнено в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Порівняльний аналіз програм навчання логарифмів у 11 класі

Критерій	Стандартний/базовий рівень	Профільний рівень
Кількість годин	16 годин (I семестр)	40 годин (I семестр)
Основні завдання	Ознайомлення з властивостями функцій Графічне зображення Розпізнавання функцій Побудова графіків	Формулювання визначень Вивчення властивостей Побудова графіків Перетворення виразів з логарифмами
Рівняння та нерівності	Найпростіші рівняння та нерівності	Рівняння, нерівності та їх системи, у тому числі з параметрами
Похідні	Не передбачено	Вивчення похідних показникових та логарифмічних функцій
Практичне застосування	Ілюстрація властивостей через графіки, опис реальних процесів	Розв'язування прикладних задач, моделювання різних ситуацій
Складність	Базова, типові завдання	Підвищена, підготовка до вищої математики
Теоретична глибина	Основні поняття та властивості	Детальне вивчення властивостей, аналітичні доведення, дослідження функцій

Джерело: складено на основі Додатку А

У базовому курсі 11 класу на вивчення показникових і логарифмічних функцій відводиться 16 годин, що є обмеженим часом для складної теми [19]. Учень має опанувати означення логарифма:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0 \qquad (1.10)$$

засвоїти основні властивості логарифмів і навчитися будувати прості графіки функцій виду $y=\log_a x$. Особливу увагу приділяють графічному підходу, оскільки він дозволяє пов’язати теоретичні твердження з наочними образами. Наприклад, при порівнянні графіків функцій $y=\log_2 x$ і $y=\log_{1/2}$ учні

спостерігають, що при a>1логарифмічна функція зростає, а при 0<a<10 – спадає. Це закріплює теоретичну властивість монотонності та розвиває когнітивний компонент компетентності.

Типові завдання базового рівня пов'язані з обчисленням та простими перетвореннями, наприклад:

$$\log_2 8, \quad \log_3 \frac{1}{9}, \quad \log_5 25 \tag{1.11}$$

Учні вчаться переходити між показниковою та логарифмічною формою запису:

$$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3, \; 3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2 \tag{1.12}$$

Такі вправи сприяють формуванню процедурної компетентності, адже типові прийоми доводяться до автоматизму.

У базовому курсі розглядаються найпростіші логарифмічні рівняння й нерівності, де від учня вимагається правильно визначити область допустимих значень, застосувати означення логарифма та основні властивості. Наприклад:

$$\log_3(x-2) = 2 \Rightarrow x - 2 = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 11, x > 2 \tag{1.3}$$

У таких завданнях формуються елементи діяльнісного та рефлексивного компонентів: учень має не тільки знайти розв'язок, а й перевірити його належність ОДЗ.

Програма базового рівня передбачає також ілюстрацію зв'язку логарифмічних функцій з реальними процесами: зростання та спадання величин, наближення до асимптот, порівняння швидкостей зміни функцій [19]. Наприклад, учням можна запропонувати інтерпретувати графік логарифмічної функції як модель процесу, який сповільнюється з часом (насичення, зменшення

ефекту тощо). На цьому рівні йдеться радше про якісне розуміння, ніж про повноцінне математичне моделювання.

У профільному курсі алгебри 11 класу на тему показникових і логарифмічних функцій відводиться близько 40 годин, що дає змогу значно глибше опрацювати матеріал [23]. Учні, орієнтовані на математичні, технічні чи економічні спеціальності, мають не лише відтворювати означення, а й самостійно виводити властивості логарифмів, доводити теореми, досліджувати логарифмічні функції аналітично.

У центрі навчання профільного рівня – систематична робота з функціями:

– означення та виведення властивостей логарифма;

– побудова й дослідження графіків $y = \log_a x$, $y = \log_a(x + b)$, $y = k \log_a x$

– перетворення складних логарифмічних виразів із використанням формул

– перетворення складних логарифмічних виразів із використанням формул.

$$y = \log_a x,\ y = \log_a(x + b),\ y = k \log_a x \tag{1.14}$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \log_a x^k = k \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \tag{1.15}$$

Розв’язуються не лише найпростіші, а й складні рівняння, нерівності та їх системи, зокрема з параметрами. Наприклад:

$$\log_2(x^2 - 3x) = \log_2(x - 3), x > 3 \tag{1.16}$$

або нерівність

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 3) \geq 1 \quad (1.17)$$

з подальшим аналізом області визначення й знаків виразу в дужках. Такі завдання формують логічну та методологічну компетентності: учні вчаться будувати рівносильні перетворення, стежити за коректністю кроків і оцінювати доцільність обраного способу розв'язання.

Важливою особливістю профільного рівня є включення елементів математичного аналізу: вивчаються похідні показникових і логарифмічних функцій, що дозволяє досліджувати їхню поведінку:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}, a > 0,\ a \neq 1 \quad (1.18)$$

На основі похідних аналізують зростання/спадання, екстремуми, опуклість. Наприклад, дослідити функцію

$$f(x) = \ln x - x, x > 0 \quad (1.19)$$

знайти її похідну $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ розв'язати рівняння $f'(x) = 0$,

встановити, що максимум досягається при x=1, побудувати графік та інтерпретувати отриманий результат. Це розвиває дослідницьку компетентність та вчить використовувати математичний апарат для аналізу реальних залежностей.

Особливе значення в профільному курсі має практичне застосування логарифмічних функцій. У задачах відображаються реальні моделі: кислотність розчинів

$$\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+] \quad (1.20)$$

рівень гучності звуку

$$L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad (1.21)$$

моделі зростання/спаду, пов’язані з експоненціальною та логарифмічною залежностями. Наприклад, учням пропонують задачу: «У сейсмології сила землетрусу за шкалою Ріхтера визначається як

$$M = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right) \tag{1.22}$$

Знайти, у скільки разів амплітуда коливань при землетрусі силою 6 балів більша, ніж при землетрусі силою 4 бали». Такі задачі напряму пов’язують зміст навчання з формуванням математичної компетентності як здатності моделювати та інтерпретувати реальні ситуації.

Разом з тим аналіз чинних і попередніх підручників з алгебри й початків аналізу для 11 класу показує, що в підручниках академічного та профільного рівнів [1; 2], а також у виданнях для класів із поглибленим вивченням математики [3] прикладні задачі на логарифмічну функцію практично відсутні. Лише в окремих підручниках [4; 5] подано поодинокі приклади таких задач. У результаті учні часто добре володіють технікою перетворення логарифмічних виразів і розв’язування «чистих» рівнянь, але не бачать, як ці вміння працюють у реальних контекстах. Це негативно впливає на мотиваційний компонент математичної компетентності.

Методичні рекомендації Т. Гриневич [9] звертають увагу на труднощі учнів при застосуванні властивостей логарифмічних функцій до розв’язування конкретних задач. Проблема полягає в розриві між теоретичним знанням властивостей (монотонність, область визначення, область значень, поведінка при зміні основи) та практичним використанням цих знань у розв’язуванні рівнянь, нерівностей, побудові й аналізі графіків. Наприклад, учень може знати, що функція $y=\log_a x$ при $a>1$є зростаючою, але не застосовує це для спрощення нерівності

$$\log_a f\,(x) > \log_a g\,(x), a > 1 \tag{1.23}$$

яка рівносильна нерівності f(x)>g(x) за умови f(x)>0,g(x)>0. Це свідчить про те, що формування математичної компетентності потребує спеціально організованої роботи зі зв'язування «чистої теорії» та задачних ситуацій.

Одним із ефективних прийомів є організація усних контрольних робіт після завершення вивчення теми. Під час таких робіт учні не тільки відтворюють означення та формули, а й пояснюють, чому саме виконують ті чи інші перетворення, обґрунтовують ОДЗ, коментують побудову графіка. Вчитель фіксує за спеціальною карткою запитання й відповіді учнів, аналізує типові помилки, дає рекомендації. Таким чином перевіряються не лише репродуктивні, а й комунікативно-аргументаційні аспекти компетентності.

Суттєва особливість розв'язування логарифмічних нерівностей полягає в роботі з обмеженнями. Зазвичай рекомендують дотримуватися такої схеми:

– записати систему умов, що задають область визначення (вирази під логарифмами мають бути додатними, основа – додатна й не дорівнювати 1);

– перетворити нерівність до простішого вигляду із використанням властивостей логарифмів;

– розв'язати отриману нерівність;

– перетнути множину розв'язків із ОДЗ.

Як зазначено в [28], надмірно деталізовані обмеження іноді ускладнюють розв'язування, особливо коли результатом є інтервали. Тому доцільно подавати учням раціоналізовані схеми: об'єднувати обмеження, стисло записувати ОДЗ і вчити працювати з нею як з окремим кроком розв'язання.

Перед введенням логарифмічної функції як окремого об'єкта важливо забезпечити глибоке розуміння означення логарифма як показника степеня. Учні мають усвідомити, що записи

$$a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c \qquad (1.24)$$

є двома формами подання одного й того самого співвідношення між трьома числами. Для цього необхідні численні вправи на перехід від показникової форми до логарифмічної і навпаки, а також на обчислення «інтуїтивних» логарифмів:

$$\log_2 1 = 0, \log_2 4 = 2, \log_{10} 1\,000 = 3 \qquad (1.25)$$

Такий тренаж дає основу для подальшого засвоєння властивостей логарифмів.

Після закріплення означення учні переходять до вивчення логарифмічної функції як оберненої до показникової. Спираючись на попередній досвід роботи з оберненими функціями, вони можуть самостійно встановити, що якщо $y=a^x$, то обернена функція має вигляд $x=\log_a y$, і на основі цього побудувати графік y=log$_{f_0}$axy=\log_a xy=logax як відображення графіка $y=a^x$ відносно прямої y=x. Такий підхід підтримує розвиток логічної та дослідницької компетентностей: учні не просто запам’ятовують «готовий» графік, а виводять його з попереднього досвіду.

У підручниках і методичних матеріалах [19; 20] наголошується, що вивчення властивостей логарифмічної функції (монотонність, область визначення, область значень, поведінка при наближенні до нуля та нескінченності) має поєднувати графічний і аналітичний підходи. Учні спочатку «зчитують» властивості з графіка, а потім формально доводять їх, використовуючи означення логарифма та властивості степеневої й показникової функцій. Це дає змогу одночасно розвивати когнітивний, діяльнісний і рефлексивний компоненти математичної компетентності.

Отже, особливості навчання логарифмів у старших класах пов’язані з історичною роллю логарифмів як інструмента спрощення обчислень, відмінностями між базовим і профільним рівнями в обсязі й глибині матеріалу, а також із типовими труднощами учнів при застосуванні теорії до практичних задач. Обмежена кількість годин на базовому рівні, недостатня представленість

прикладних задач у більшості підручників і складність роботи з ОДЗ та нерівностями вимагають спеціально організованої методики, спрямованої на формування математичної компетентності через систему задач, моделей і графічно-аналітичних досліджень. Саме така методика буде розроблятися й апробовуватися в наступних розділах роботи.

1.3. Методи та підходи до формування математичної компетентності в процесі навчання логарифмів

Формування математичної компетентності під час вивчення логарифмів потребує комплексного використання таких методів навчання, які одночасно працюють на різні компоненти компетентності: мотиваційний, когнітивний, діяльнісний, ціннісно-рефлексивний та емоційно-вольовий. Йдеться не лише про засвоєння означень і формул, а про формування здатності учнів розв’язувати задачі, будувати й аналізувати математичні моделі, інтерпретувати результати та пояснювати свої міркування в усній і письмовій формі. Враховуючи значущість логарифмічних функцій у старшій школі, методи навчання мають орієнтуватися на розвиток реальних умінь працювати з виразами, рівняннями, нерівностями та прикладними задачами (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

Методи формування математичної компетентності при вивченні логарифмів

Метод навчання	Характеристика методу	Переваги методу
Проблемне навчання	Постановка учнів у ситуацію пошуку нових знань через розв'язання проблемних задач	Активізує пізнавальну діяльність; розвиває критичне мислення; стимулює самостійне здобування знань
Інтерактивне навчання	Активна участь учнів у процесі навчання через використання наочних засобів	Наочна візуалізація складних концепцій; покращує сприйняття теоретичного матеріалу; розвиває математичну грамотність
Диференційоване навчання	Врахування індивідуальних особливостей та рівня підготовки кожного учня	Максимальний розвиток здібностей кожного учня; індивідуальний темп засвоєння; підвищення мотивації
Інформаційні технології	Використання програмних засобів для побудови графіків, обчислень та дослідження функцій	Інтерактивність; наочне спостереження змін параметрів; підвищення зацікавленості учнів
Проектне навчання	Робота учнів над проектами, пов'язаними з застосуванням математичних знань у реальних ситуаціях	Розвиток критичного мислення; командна робота; комунікативні навички; практичне застосування знань
Формувальне оцінювання	Регулярне оцінювання на різних етапах навчання для корекції методів та стратегій	Своєчасна корекція навчання; усвідомлення учнями власних досягнень; виявлення слабких місць

Джерело: [10; 13; 18; 21].

Одним із провідних методів є проблемне навчання, яке активізує пізнавальну діяльність учнів [10]. Уже на етапі введення логарифма корисно створювати проблемні ситуації. Наприклад, учням пропонується розв’язати рівняння

$$2^x = 7. \tag{1.26}$$

За відомими їм методами (таблиця степенів, підбір) точне значення отримати складно. Учитель ставить запитання: «Яке число x задовольняє цю рівність і як його позначити?» Виходом стає введення нового числа $\log_2 7$, після чого формулюється означення:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0 \qquad (1.27)$$

Таким чином, означення логарифма не «з'являється з нізвідки», а є відповіддю на реальну потребу – розв'язувати показникові рівняння. Подальші проблемні ситуації можуть будуватися на задачах типу: «як описати шкалу, де збільшення на 1 відповідає зростанню величини в 10 разів?» (підводить до pH-шкали, децибелів, шкали Ріхтера). Такий підхід розвиває критичне мислення, вміння ставити запитання й самостійно робити висновки, тобто безпосередньо формує дослідницьку й методологічну компетентності.

Інтерактивне навчання спирається на активну участь учнів, обговорення, спільне розв'язування задач і використання наочних засобів [13]. При вивченні логарифмів інтерактивність особливо ефективна під час роботи з графіками. Учні в групах можуть будувати та порівнювати графіки функцій

$$y = \log_2 x\, y = \log_{1/2} x\, , y = \ln x \qquad (1.28)$$

робити висновки про їхню монотонність, область визначення, асимптоти. У ході обговорення вони формулюють узагальнення: при a>1функція $y=\log_a x$ зростає; при 0<a<10 – спадає; область визначення – x>0; вертикальна асимптота – пряма x=0.

Інтерактивні вправи можуть передбачати «читання» графіка: учні за графіком визначають значення логарифмів (наприклад, знаходять x, де $y=\log_2 x=3$), порівнюють значення, розв'язують графічно рівняння й нерівності. Обговорення в парах або малих групах стимулює математичну комунікацію й формує вміння аргументувати свої твердження.

Важливе місце під час навчання логарифмів посідає диференційоване навчання, яке враховує різний рівень підготовки учнів [21]. Воно може реалізовуватися через систему завдань різної складності для однієї й тієї самої теми. Наприклад, для теми «Означення логарифма та найпростіші обчислення» можна запропонувати три рівні:

Рівень А (базовий) – обчислити:

$$\log_2 8, \log_3 \frac{1}{27}, \log_5 25 \tag{1.29}$$

виконати перехід між записами $a^c=b$ та $\log_a b=c$.

Рівень В (середній) – розв’язати рівняння

$$\log_3(x-2) = 1 \log_2(4x) = 3 \tag{1.30}$$

врахувавши ОДЗ.

Рівень С (підвищений) – розв’язати рівняння з параметром

$$\log_a(x^2-1) = 1, \quad a > 0,\ b \neq 1 \tag{1.31}$$

або проаналізувати, при яких а рівняння має розв’язки.

Учні, які відчувають труднощі, працюють на рівні А й В з додатковою підтримкою, сильніші – отримують завдання рівня С, у тому числі прикладні задачі. Це дозволяє одночасно зберігати спільну тему й просувати кожного учня у його «зоні найближчого розвитку».

Інформаційні технології дають змогу перенести роботу з логарифмами у формат «математичної лабораторії» [18; 22]. У динамічних математичних середовищах (типу геометричних редакторів чи онлайн-графіків) учні можуть:

будувати графік $y=\log_a x$ та змінювати параметр ааа за допомогою повзунка;

досліджувати вплив додавання/множення на параметри: $y=\log_a(x-b)+c$;

моделювати прикладні залежності, наприклад pH:

$$\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+] \tag{1.32}$$

- змінювати [H+]і спостерігати зміну pH.

Такий формат дозволяє побачити, як формула «оживає»: зміна параметрів миттєво відображається на графіку. Учень може, наприклад, дослідити, як зміна основи в децибельній формулі

$$L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \tag{1.33}$$

впливає на масштабування, або перевірити розв'язок рівняння, підставивши його в програму й візуально побачивши перетин графіків. Це не замінює ручних обчислень, але підсилює розуміння та формує навички використання математичних ІКТ.

Проєктне навчання спрямоване на застосування логарифмів у реальних або наближених до реальних ситуаціях [24]. Для теми логарифмів можливі, зокрема, такі міні-проєкти:

– «pH як логарифмічна шкала» – дослідити, як зміна концентрації іонів Гідрогену в десять разів змінює pH на 1 одиницю; побудувати таблицю

$$[\mathrm{H}+] = 10-3{,}10-4{,}10-5,\ldots,\mathrm{pH} = 3{,}4{,}5,\ldots \tag{1.34}$$

і проаналізувати, чому саме логарифм з основою 10 використовується в цій моделі.

«Шкала Ріхтера» – розглянути формулу

$$M = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right) \tag{1.35}$$

розв'язати задачі на порівняння сили землетрусів (на скільки разів різняться амплітуди при різниці в 1, 2, 3 бали).

«Логарифми у фінансах» – дослідити модель складних відсотків

$$S = P(1+i)^n \tag{1.36}$$

та вивести формулу для знаходження

$$n = \frac{\log(S/P)}{\log(1+i)} \tag{1.37}$$

Під час таких проєктів учні працюють з реальними даними, складають моделі, виконують обчислення, інтерпретують результати та презентують висновки. Це безпосередньо формує дослідницьку, комунікативну та ціннісно-рефлексивну складові математичної компетентності.

Особливу роль у процесі формування компетентності відіграє формувальне оцінювання [6]. При вивченні логарифмів воно може реалізовуватися через:

– короткі діагностичні завдання на початку уроку (наприклад, «обчисліть: $\log_2 8$, $\log_3 27$, $\log_{10} 0.01$» – для перевірки процедурного рівня);

– міні-тести після вивчення властивостей логарифмів (завдання на застосування формул добутку, частки, степеня); рефлексивні запитання наприкінці уроку («що було найскладнішим у розв’язуванні логарифмічних нерівностей?»; «яку помилку сьогодні виправили?»).

Учитель аналізує результати, виявляє типові помилки (наприклад, ігнорування ОДЗ, неправильне використання властивостей при $0<a<1$) і коригує подальші кроки навчання. Для учня формувальне оцінювання стає засобом самодіагностики: він бачить свої сильні й слабкі сторони, розуміє, куди спрямувати зусилля. Це підсилює емоційно-вольовий компонент: помилка перестає бути «катастрофою», а розглядається як ресурс для зростання.

На окрему увагу заслуговує систематична робота з логарифмічними тотожностями як інструментом розв’язування рівнянь і нерівностей [16]. Тут доцільно поєднувати проблемний, інтерактивний та ІКТ-методи: спочатку учні виводять властивості з означення й властивостей степеня, потім застосовують їх у розв’язуванні задач, перевіряючи результати графічно чи за допомогою програм. Наприклад, під час розв’язування рівняння:

$$\log_2(x-1)+\log_2(x+3)=3 \qquad (1.38)$$

учні спочатку формулюють ОДЗ: x−1>0,x+3>0⇒x>1, потім застосовують властивість добутку:

$$\log_2\big((x-1)(x+3)\big)=3 \Rightarrow (x-1)(x+3)=2^3=8 \qquad (1.39)$$

розв’язують квадратне рівняння і наприкінці обов’язково перевіряють, які корені належать ОДЗ. Такі завдання розвивають логічну послідовність мислення, вміння обґрунтовувати кожен крок і працювати з обмеженнями.

Отже, формування математичної компетентності в процесі навчання логарифмів є багатогранним процесом, що вимагає інтегрованого використання проблемного, інтерактивного, диференційованого, проєктного навчання, інформаційних технологій і формувального оцінювання. Кожен із методів набуває конкретного змісту через систему задач, моделей, графіків та проєктів, пов’язаних із логарифмічними функціями. Таке поєднання дозволяє не лише засвоїти теоретичний матеріал, а й сформувати в учнів стійку здатність застосовувати логарифми для розв’язування навчальних і практичних задач, що стане основою для подальшої розробки курсу й експериментальної перевірки його ефективності в наступних розділах роботи.

Висновки до першого розділу

Отже, проаналізувавши теоретичні засади формування математичної компетентності учнів старших класів, можемо зазначити, що математична компетентність є комплексним явищем, що охоплює не лише знання та вміння, але й навички й особистісні якості, які необхідні для ефективного виконання математичних завдань. Вона включає не тільки теоретичні знання, але й здатність застосовувати математичні методи в реальних ситуаціях, вирішувати

задачі та розвивати аналітичне мислення. Математична компетентність складається з кількох складових, таких як мотиваційний, когнітивний, діяльнісний, ціннісно-рефлексивний і емоційно-вольовий аспекти. Вона спрямована не тільки на засвоєння математичних знань, а й на розвиток особистих якостей, необхідних для професійної діяльності. Ця компетентність є важливим інструментом для розв'язування як теоретичних, так і практичних завдань.

Вивчення логарифмічних функцій є важливою частиною курсу алгебри та початків аналізу для учнів 11 класу, оскільки ці функції мають значення як для теоретичних досліджень, так і для практичних застосувань. Учні не лише ознайомлюються з основними властивостями логарифмів, але й навчаються їх графічному зображенню та застосуванню в різних задачах, таких як розв'язування рівнянь і нерівностей. Однією з важливих складових цього процесу є освоєння логарифмічних тотожностей, що дозволяє учням здійснювати складніші обчислення та трансформацію виразів. Однак, попри це, в навчальних матеріалах досі не вистачає достатньої кількості прикладних задач, що ускладнює практичне застосування теоретичних знань.

Процес формування математичної компетентності під час навчання логарифмам є складним і багатовимірним завданням яке вимагає комплексного підходу та використання різноманітних педагогічних методів. Успішне викладання цієї теми не може обмежуватися лише традиційними лекціями та розв'язуванням стандартних вправ з підручника. Сучасна методика передбачає органічне поєднання перевірених часом традиційних методів навчання з інноваційними підходами що відповідають вимогам сьогодення. Інтерактивне навчання з використанням комп'ютерних програм та візуалізацій, проектне навчання де учні працюють над реальними задачами, активне застосування інформаційних технологій для дослідження властивостей функцій – все це разом створює потужне навчальне середовище. Такий інтегрований підхід дозволяє учням не просто механічно запам'ятати формули та алгоритми а справді глибоко зрозуміти математичні концепції що стоять за логарифмами. Учні здобувають

практичні навички які можуть застосовувати для розв'язування реальних життєвих задач у науці техніці економіці та інших сферах.

РОЗДІЛ 2. РОЗРОБКА МЕТОДИКИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ЛОГАРИФМІВ

2.1 Аналіз існуючих методичних підходів до вивчення логарифмів у школах

Методика Т. Гриневич [9] спрямована на поетапне формування в учнів цілісного уявлення про логарифми з обов’язковою опорою на практичні контексти. Введення теми відбувається через проблемні ситуації: наприклад, розв’язування рівнянь виду:

$$2^x = 7,\ 10^x = 0.004 \tag{1.40}$$

коли традиційні табличні способи вже не працюють, підводить учнів до потреби в новому числовому об’єкті – логарифмі. Далі пропонується формулювання означення:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \qquad a > 0,\ b \neq 1,\ c > 0 \tag{1.41}$$

і відразу – серія вправ на перехід між показниковим та логарифмічним записом:

$$3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 8\,1 = 4,\ 10^{-2} = 0.01 \Leftrightarrow \log_{10} 0.01 = -2 \tag{1.42}$$

У методиці значну роль відіграють графіки логарифмічних функцій, які будуються як вручну, так і за допомогою комп’ютерних програм. Учні досліджують залежність вигляду графіка $y=\log_a x$ від основи ааа, порівнюють випадки $a>1$ і $0<a<1$, фіксують область визначення, асимптоти, характер зростання/спадання. Це безпосередньо розвиває когнітивний і діяльнісний

компоненти математичної компетентності. Окремо наголошується на обов'язковій перевірці коренів логарифмічних рівнянь і нерівностей: після знаходження розв'язків, наприклад для:

$$\log_3(x-2) = 2 \Rightarrow x - 2 = 9 \Rightarrow x = 11 \tag{1.43}$$

учні мають повернутися до ОДЗ (x−2>0) і переконатися, що розв'язок є припустимим. Така систематична робота формує вміння контролювати власні дії й самоаналіз, що важливо для ціннісно-рефлексивного компонента компетентності.

Методика Л. Самойленко [28] зосереджена на точності формально-логічних міркувань і чіткому алгоритмі розв'язування логарифмічних рівнянь та нерівностей. Базовим елементом тут є робота з областю допустимих значень. На початку розв'язування будь-якого рівняння чи нерівності, наприклад:

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3 \tag{1.44}$$

учні мають записати ОДЗ:

$$x - 1 > 0, \quad x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \tag{1.45}$$

і лише потім переходити до рівносильних перетворень:

$$\log_2\big((x-1)(x-3)\big) = 3 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 8 \tag{1.46}$$

Розв'язавши квадратне рівняння, необхідно перевірити, які корені належать ОДЗ. Такий підхід привчає до уважної роботи з обмеженнями й зменшує ризик появи сторонніх або втрачених коренів.

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей у методиці Самойленко ключовою є властивість монотонності:

– якщо a>1, то з $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ (за умови f(x)>0 ,g(x)>0 випливає f(x)>g(x)

– якщо 0<a<1, знак нерівності змінюється.

Наприклад, при розв'язуванні

$$\log_{1/2}(x+1) \leq \log_{1/2}(3x-5) \tag{1.47}$$

учні мають врахувати: x+1>0, 3x−5>0, а також те, що основа 1/2∈(0;1)), отже нерівність змінює знак і переходить у

$$x+1>0, 3x-5>0 \tag{1.48}$$

Такий формалізований, покроковий підхід із постійною перевіркою кожного етапу розв'язання формує логічну й процедурну складові математичної компетентності, а також дисциплінує мислення.

Методика Л. Соколенко та В. Швеця [31] робить акцент на прикладному потенціалі логарифмів, поєднуючи теорію з задачами з різних галузей. Логарифмічні моделі розглядаються як інструмент опису реальних процесів. Так, при вивченні логарифмів учні розв'язують задачі на:

1) народонаселення – аналіз експоненційного зростання $N(t)=N_0a^t$ і визначення часу подвоєння населення через логарифм:

$$N(t) = 2N_0 \Rightarrow a^t = 2 \Rightarrow t = \frac{\log_a 2}{1} \tag{1.49}$$

2) радіоактивний розпад – використання моделі

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}} \tag{1.50}$$

де для знаходження часу до зменшення маси в k разів застосовують логарифм;

3) сейсмологію – формулу для сили землетрусу

$$M = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right) \tag{1.51}$$

на основі якої розв'язуються задачі типу: «На скільки разів амплітуда коливань при землетрусі силою 6 балів більша, ніж при 4 балах?»;

4) акустичні процеси – децибельна шкала

$$L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \tag{1.52}$$

астрономію та медицину – зоряна величина, концентрації речовин тощо.

Задачі різної складності (від прямих підстановок у формулу до обернених задач на знаходження часу, показника, коефіцієнтів) дозволяють поступово нарощувати діяльнісну й дослідницьку компетентності. Важливе місце відводиться фінансовим задачам на складні відсотки, де використовується модель:

$$S = P(1+i)^n,\ n = \frac{\log(S/P)}{\log(1+i)} \tag{1.53}$$

що демонструє учням безпосередній зв'язок логарифмів із економічними розрахунками. Такі задачі сприяють формуванню мотиваційного компонента: учень бачить, що логарифми потрібні не лише «для ЗНО», а й у реальних життєвих ситуаціях.

Методика Л. Соколенко [30] пропонує цілісний курс вивчення показникових і логарифмічних функцій у 11 класі, в якому матеріал послідовно ускладнюється. Розгляд починається з узагальнення поняття функції й властивостей степеневих і показникових функцій, після чого логарифмічна функція вводиться як обернена до показникової. Учні будують графіки пар:

$$y = a^x, y = \log_a x \tag{1.54}$$

досліджуючи їхню симетрію відносно прямої y=x, а потім переходять до дослідження функцій вигляду:

$$\mathrm{y} = \log_{\mathrm{a}}(\mathrm{x} - \mathrm{b}) + \mathrm{c}, \tag{1.55}$$

що моделюють різні зсуви та деформації графіка.

Далі у методиці послідовно з'являються задачі на моделювання природних процесів. Наприклад, зростання популяції бактерій описується формулою:

$$N(t) = N_0 q^t \tag{1.56}$$

і завданням є знайти час, за який кількість бактерій збільшиться в k разів; це приводить до логарифмічного рівняння:

$$N_0 q^t = kN_0 \Rightarrow q^t = k \Rightarrow t = \frac{\log k}{\log q} \tag{1.57}$$

Прикладні задачі на шкалу Ріхтера, pH, децибели, амортизацію обладнання дають можливість посилити дослідницький компонент, оскільки учні не тільки підставляють числа у формули, а й аналізують доцільність використання саме логарифмічної моделі, роблять висновки й оцінюють реалістичність отриманих результатів.

Отже, розглянуті методики демонструють різні акценти у вивченні логарифмів: від структурованого, алгоритмічного підходу (Т. Гриневич, Л. Самойленко) до прикладно-моделюючого та комплексного (Л. Соколенко, В. Швець). Усі вони в різній мірі спрямовані на формування математичної компетентності як здатності:

– коректно працювати з означенням та властивостями логарифмів (когнітивний компонент);

– послідовно розв’язувати рівняння й нерівності з урахуванням ОДЗ (діяльнісний та логічний компоненти);

– будувати та інтерпретувати математичні моделі реальних процесів (дослідницький компонент);

– усвідомлювати практичну цінність логарифмів (мотиваційний і ціннісно-рефлексивний компоненти).

Цей аналіз створює підґрунтя для розробки власного курсу факультативних занять з логарифмів, у якому сильні сторони розглянутих методик будуть поєднані в єдину систему завдань, моделей і дослідницьких ситуацій (розділ 2.2).

2.2 Розробка методики формування математичної компетентності при вивченні логарифмів

Вивчення логарифмів у курсі алгебри 11 класу є важливим етапом формування математичної компетентності старшокласників, оскільки поєднує опанування нового понятійного апарату з умінням застосовувати його для опису реальних процесів у фізиці, економіці, інформатиці, хімії та інших галузях. Разом із тим абстрактний характер логарифмічних понять, необхідність працювати з оберненістю до показникової функції, областями визначення та монотонністю створюють для багатьох учнів суттєві труднощі. Тому була розроблена спеціальна методика формування математичної компетентності при вивченні логарифмів на базовому рівні в 11 класі (див. Додаток Г), яка поєднує традиційні підходи, сучасні цифрові інструменти та міжпредметні зв’язки.

Методика спирається на програму курсу «Алгебра і початки аналізу» [18] та враховує реальні умови сучасної школи. Її структура охоплює послідовний перехід від показникових функцій до логарифмів: спочатку учні повторюють та

поглиблюють знання про степеневі та показникові функції, будують їх графіки, розв’язують показникові рівняння. Далі вводиться означення логарифма:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \quad a > 0,\ b \neq 1,\ c > 0 \tag{1.58}$$

вивчаються основні властивості логарифмів, графіки логарифмічних функцій, а потім – логарифмічні рівняння та нерівності. Така побудова забезпечує логічну безперервність: кожен новий елемент спирається на попередній, що зменшує психологічну напругу й підсилює когнітивний компонент компетентності.

Методика включає систему завдань різної складності – від базових вправ на обчислення логарифмів і перехід між показниковою та логарифмічною формами до розв’язування рівнянь і нерівностей та прикладних задач. Уже на початкових етапах пропонуються вправи виду:

$$2^x = 8, \quad 5^x = \frac{1}{25}, \quad 10^x = 0.001 \tag{1.59}$$

що переносяться у логарифмічну форму:

$$x = \log_2 8, \qquad x = \log_5 \frac{1}{25}, \quad x = \log_{10} 0.001 \tag{1.60}$$

і обчислюються як 3, −2, −3 відповідно. Далі учні переходять до рівнянь на кшталт:

$$\log_3(x - 2) = 2, \quad \log_2(4x - 1) = 3 \tag{1.61}$$

і простих нерівностей, де обов’язково відпрацьовується визначення області допустимих значень і перевірка розв’язків.

Методика передбачає проміжний контроль у вигляді самостійних робіт після 3-го та 7-го уроків, а також підсумкове тестування після завершення теми

(див. Додаток В). Перша самостійна робота орієнтована переважно на процедурний рівень (означення логарифма, обчислення, перші властивості), друга – на діяльнісний рівень (розв'язування найпростіших рівнянь і нерівностей, робота з графіками). Підсумковий тест містить завдання на:

– обчислення й перетворення логарифмічних виразів;
– розв'язування рівнянь і нерівностей з урахуванням ОДЗ;
– побудову й аналіз графіків $y=\log_a x$;
– прикладні задачі (pH, децибели, складні відсотки тощо).

Результати цих форм контролю використовуються не лише для виставлення оцінок, а й для діагностики рівня сформованості математичної компетентності, виявлення типових помилок і подальшої корекції навчання.

Суттєвим елементом методики є систематичне використання міжпредметних зв'язків. При вивченні експоненційних і логарифмічних залежностей учні розглядають моделі:

$S = P(1 + i)^n$ (складні відсотки), $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}$ (радіоактивний розпад), а також формули:

$$\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+],\ L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \tag{1.62}$$

При розв'язуванні задач на зразок: «За скільки років сума вкладу подвоїться при ставці i?», учні виводять

$$(1 + i)^n = 2P \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log(1+i)} \tag{1.63}$$

що демонструє практичну цінність логарифмів та розвиває дослідницьку компетентність. Подібні задачі з фізики, хімії, економіки, інформатики показують, що логарифми – це універсальний інструмент моделювання, а не «відірвана від життя» тема.

Методика активно інтегрує сучасні інформаційні технології (див. Додаток Б). Серед основних інструментів – Classroom для організації курсу, збору робіт та зворотного зв’язку; GeoGebra та Desmos для побудови й дослідження графіків логарифмічних і показникових функцій; Kahoot для швидких онлайн-опитувань та формувального оцінювання; Wolfram Alpha та Microsoft Mathematics для перевірки розв’язків, аналізу типових помилок; YouTube, Canva, PowerPoint – для створення та перегляду мінілекцій, відеопоясснень і візуальних конспектів. Наприклад, на уроці, присвяченому дослідженню функції $y=\log_a x$, учні в GeoGebra змінюють значення параметра ааа, спостерігаючи, як змінюється графік, крива зростає чи спадає, як розташовується асимптота. У Kahoot можуть проводитися короткі тести на розпізнавання правильних ОДЗ або властивостей логарифмів, а в Classroom – розміщуватися додаткові завдання й відеороз’яснення для тих, хто потребує повторення.

Психолого-педагогічні особливості учнів старшого шкільного віку були враховані при конструюванні методики. Логарифми вимагають розвинутого абстрактного мислення, уміння оперувати з оберненими функціями та складеними виразами. Тому подання матеріалу організовано поетапно: від конкретних числових прикладів і графічних моделей – до абстрактних властивостей та доведень. На ранніх етапах значна частина завдань має вигляд:

$$\log_2 8,\ \ \log_3 9,\ \ \ \log_5 25 \qquad (1.64)$$

щоб сформувати інтуїтивне відчуття логарифма як показника степеня. Лише після цього вводяться загальні формули, тотожності, рівняння й нерівності. Такий підхід знижує тривожність і запобігає ситуації, коли учень бачить лише «суцільні літери й символи» без опори на конкретний зміст.

Важливим елементом є диференціація завдань. В одному уроці можуть пропонуватися вправи трьох рівнів складності: від базових на відпрацювання означення та властивостей до завдань із параметрами або прикладних задач. Учні з високим рівнем підготовки отримують додаткові дослідницькі завдання

(наприклад, дослідити залежність часу напіврозпаду від параметрів моделі, проаналізувати логарифмічну складність алгоритмів пошуку в інформатиці), тоді як ті, хто відчуває труднощі, отримують докладніші інструкції, покрокові алгоритми та наочні підказки. Це допомагає уникнути відчуття «відставання» й підтримує емоційно-вольовий компонент математичної компетентності.

Мотиваційний аспект методика розв’язує через постійне підкреслення практичної значущості логарифмів. Під час кожного тематичного блоку учні працюють хоча б з однією задачою реального змісту – фінансовою, фізичною, екологічною чи інформаційною. Наприклад, при вивченні шкали pH розглядається, як зміна pH на одиницю відповідає десятикратній зміні концентрації іонів Гідрогену; при вивченні шкали Ріхтера – як різниця у 2 бали означає в сотні разів більшу амплітуду коливань. Такий підхід допомагає подолати типову проблему, коли учні не розуміють, «навіщо їм логарифми», і сприймають тему як абстрактну й «непотрібну».

Психологічний бар’єр, пов’язаний зі страхом помилок, долається завдяки організації безпечного навчального середовища: помилка розглядається як ресурс для аналізу, а не як «невдача». Формувальне оцінювання (міні-тести, усні обговорення розв’язків, взаємоперевірка в парах) допомагає учням отримувати регулярний зворотний зв’язок без «ефекту великої контрольної», коли помилка сприймається надто болісно.

У межах методики запропоновано шкалу оцінювання результатів навчання, узгоджену з рівнем сформованості математичної компетентності.

1) Відмінний рівень (10–11 балів). Учень повністю і коректно володіє теоретичним матеріалом, вільно оперує означенням і властивостями логарифмів, упевнено розв’язує рівняння й нерівності, уміє пояснити кожен крок розв’язання, використовує математичну мову та графіки для обґрунтування своїх міркувань. Самостійні й домашні роботи виконано без суттєвих помилок, розв’язки оформлено акуратно й логічно, проявляється високий рівень самостійності.

2) Добрий рівень (7–9 балів). Основні поняття й методи засвоєно, учень уміє розв’язувати більшість типових задач, але іноді припускається несуттєвих

помилок у перетвореннях або не завжди повно аргументує розв’язання. Самостійні роботи виконано в цілому вірно, можливі окремі недоліки в оформленні чи деталях пояснення.

3) Задовільний рівень (4–6 балів). Учень володіє основними прийомами, але демонструє фрагментарне розуміння теорії, припускається помилок у роботі з ОДЗ, властивостями логарифмів, графіками. У самостійних і домашніх роботах є пропуски, неповні розв’язання, неправильне застосування формул. Потрібна додаткова підтримка й повторення базових понять.

4) Незадовільний рівень (2–3 бали). Учень не засвоїв ключових понять, не вміє коректно застосовувати означення й властивості логарифмів, допускає грубі помилки в обчисленнях і перетвореннях, не може пояснити свої дії. Самостійні й домашні роботи виконуються частково або взагалі не виконуються, що свідчить про низький рівень сформованості математичної компетентності.

Методика (Додаток Г), розроблена для стандартного рівня вивчення логарифмів у курсі алгебри, поєднує поетапне введення теоретичного матеріалу, систему вправ і задач різної складності, міжпредметні зв’язки, інтеграцію сучасних інформаційних технологій та увагу до психологічних особливостей старшокласників. Це дозволяє не лише забезпечити засвоєння означення й властивостей логарифмів, умінь розв’язувати рівняння й нерівності, а й сформувати у старшокласників здатність застосовувати логарифми для опису й аналізу реальних процесів, що є ключовою ознакою математичної компетентності.

2.3 Роль учителя в процесі формування математичної компетентності учнів при вивченні логарифмів

Роль учителя в процесі формування математичної компетентності учнів при вивченні логарифмів є надзвичайно важливою, оскільки логарифмічні функції та їх властивості є ключовими складовими математичної освіти. Вони відіграють важливу роль у розвитку здатності учнів не лише оперувати

математичними поняттями, а й застосовувати їх у практичних ситуаціях. Математична компетентність охоплює не лише знання формул, алгоритмів і правил, але й здатність використовувати ці знання для вирішення реальних задач. Логарифми, як частина алгебри, мають безліч застосувань у природничих науках, техніці, економіці, і вони є основою для подальшого вивчення багатьох математичних дисциплін, таких як диференціальні рівняння, теорія чисел та багато інших.

Саме тому роль учителя не зводиться лише до пояснення формул і теорем. Вчитель має забезпечити всебічний підхід до навчання, спрямований на формування у учнів не тільки технічних навичок, але й здатності до самостійного мислення, критичного підходу та творчого вирішення математичних задач. Важливим аспектом у навчанні логарифмів є те, що учні повинні не лише засвоїти правила обчислення логарифмів, але й зрозуміти їхнє значення та застосування в реальних умовах.

Однією з основних рекомендацій є активне використання методів навчання, що дозволяють учням стати учасниками навчального процесу. Це включає інтерактивні завдання, роботу в групах, математичні проекти та дослідження, які дозволяють учням не тільки поглиблювати свої знання, а й розвивати аналітичне мислення. Вчитель має сприяти розвитку інтересу до предмета, заохочуючи учнів до активної участі в обговореннях, до самостійних пошуків рішень, до розв'язування задач, які вимагають творчого підходу. Наприклад, можна використовувати завдання, пов'язані з реальними життєвими ситуаціями, де потрібно обчислювати складні відсотки, зростання чи спадання величин, щоб учні могли побачити, як логарифми допомагають вирішувати реальні проблеми.

Крім того, важливо, щоб учитель активно використовував сучасні технології, які не лише полегшують розуміння складних математичних понять, але й роблять процес навчання більш інтерактивним і цікавим для учнів. Використання комп'ютерних програм для побудови графіків, таких як Classroom, GeoGebra, Desmos, Wolfram Alpha, дозволяє учням наочно побачити, як

змінюються функції, як виглядають графіки логарифмічних функцій за різних параметрів. Це значно сприяє розвитку математичної інтуїції та покращенню візуалізації абстрактних понять, таких як логарифми. Застосування таких інструментів дозволяє учням не тільки засвоїти теоретичний матеріал, але й розвинути практичні навички роботи з математичними програмами, що стане корисним у подальшому навчанні та професійній діяльності.

З одного боку, вивчення логарифмів може бути складним етапом у навчанні, особливо для тих учнів, які вперше зустрічаються з цією темою. Однак завдяки правильному підходу та методам навчання вчитель може зробити цей процес легшим та зрозумілішим. Одним з важливих аспектів є допомога учням у розумінні зв'язку між показниковими функціями та логарифмами, оскільки ці поняття взаємопов'язані. Вчитель може використовувати приклади з реального життя, які демонструють, як логарифми допомагають розв'язувати задачі на складні відсотки, зростання та спадання величин, на основі яких можна більш детально розкрити концепцію логарифмічних виразів.

Також важливо звертати увагу на помилки учнів, які є природною частиною навчального процесу. Для багатьох учнів труднощі у розв'язуванні логарифмічних рівнянь і нерівностей є нормальними, і тому важливо створити таку атмосферу в класі, де помилки не сприймаються як негатив, а є частиною навчання. Учитель повинен допомогти учням працювати з помилками, аналізувати їх і виправляти, а також створювати можливості для спільної роботи в групах або парах, де учні можуть обговорювати свої підходи до розв'язання задач і взаємно коригувати свої помилки.

Ще одним важливим аспектом є використання міжпредметних зв'язків. Логарифми мають застосування в різних наукових дисциплінах, таких як фізика, хімія, економіка, інженерія тощо. Наприклад, при вивченні логарифмів учні можуть дізнатися про використання логарифмів у фізичних законах (наприклад, у законах збереження енергії), у розв'язанні економічних задач, пов'язаних з відсотками, або в математиці, де логарифми використовуються для спрощення складних обчислень. Це дозволяє учням бачити практичну значущість

математичних знань і дає їм змогу розуміти, як математика взаємодіє з іншими науками та реальним світом.

Висновки до другого розділу

Отже, для ефективного формування математичної компетентності учнів при вивченні логарифмів була розроблена спеціальна методика, орієнтована на стандартний рівень навчання в 11 класі з курсу алгебри. Ця методика ґрунтується на програмі «Алгебра і початки аналізу», що визначає основні напрямки та методи роботи з учнями, спрямовані на засвоєння теоретичних і практичних аспектів теми логарифмів. Методика передбачає інтеграцію сучасних технологій і різноманітних засобів навчання, таких як Classroom, GeoGebra, Desmos, Kahoot, Wolfram Alpha, Microsoft Mathematics, YouTube, Canva та PowerPoint. Розроблені завдання різного ступеня складності, включаючи самостійні роботи після 3 і 7 уроків, допомагають учням перевірити рівень своїх знань та відслідковувати прогрес.

У методиці важливу роль відіграють міжпредметні зв'язки, що дозволяють учням побачити застосування математичних знань у реальних ситуаціях, зокрема в природничих науках, техніці та економіці. Програма алгебри для 11 класу передбачає поступове знайомство учнів з логарифмічною функцією, починаючи з вивчення властивостей та графіків показникових функцій, після чого переходять до вивчення логарифмів, їхніх властивостей та графіків. Розроблена методика органічно поєднує ці етапи вивчення, створюючи можливість для учнів не лише засвоїти теоретичний матеріал, але й навчитися практично застосовувати свої знання при розв'язуванні логарифмічних рівнянь і нерівностей.

Роль учителя в процесі формування математичної компетентності учнів при вивченні логарифмів є надзвичайно важливою та багатогранною. Вчитель повинен не тільки пояснювати основні теоретичні аспекти теми, але й сприяти розвитку критичного мислення та творчих здібностей учнів, допомагаючи їм побачити застосування логарифмів у реальних ситуаціях. Використання

сучасних технологій, інтерактивних завдань і міжпредметних зв'язків дозволяє зробити навчання більш цікавим, наочним і практично орієнтованим. Завдяки комплексному підходу вчитель може створити умови для ефективного засвоєння матеріалу та розвитку математичних компетенцій, що стане основою для подальших досягнень учнів у математичному навчанні та професійній діяльності.

РОЗДІЛ 3. АПРОБАЦІЯ МЕТОДИКИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ЛОГАРИФМІВ

3.1 Опис проведеного експерименту

З метою апробації розробленої методики формування математичної компетентності при вивченні логарифмів було проведено педагогічний експеримент серед учнів 11 класу (20 осіб) у с. Лоп’янка. Перевірка ефективності методики здійснювалася за допомогою підсумкового контрольного тесту з теми «Логарифми, їх властивості та функції», укладеного відповідно до програми курсу «Алгебра і початки аналізу» [18] (див. Додаток В), а також п’яти лабораторних практикумів, присвячених різним напрямам застосування логарифмів (див. Додаток Д). Такий комплексний підхід дав змогу оцінити не лише рівень засвоєння теоретичного матеріалу, а й здатність учнів використовувати логарифми як інструмент для розв’язування задач.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,\ a > 0,\ \ a \neq 1, b > 0 \tag{1.65}$$

а також користуватися базовими тотожностями:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,\ \ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a,\ \ y \log_a x^k = k \log_a x \tag{1.66}$$

Перші, найпростіші завдання тесту були спрямовані на перевірку засвоєння означення логарифма й уміння виконувати найпростіші обчислення. Наприклад, учням пропонувалося обчислити:

$$\log_2 8, \quad \log_3 \frac{1}{9}, \ \log_{10} 0.001 \tag{1.67}$$

а також встановити відповідність між парами записів:

$$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3, \ 5^{-2} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{25} = -2 \tag{1.68}$$

Окремі завдання вимагали впізнати, яка із запропонованих функцій є показниковою, а яка – логарифмічною, наприклад серед:

$$y = 2^x, \ y = \log_2 x, \quad y = x^2 \tag{1.69}$$

Результати показали, що більшість учнів упевнено володіє базовими поняттями: значення типу $\log_2 8=3$, $\log_3 19=-2$ обчислювалися без особливих труднощів. Водночас поодинокі помилки свідчили, що частині учнів потрібне додаткове закріплення саме означення логарифма як показника степеня.

Завдання середнього рівня були спрямовані на перевірку вміння застосовувати кілька властивостей логарифмів одночасно та будувати послідовність перетворень. Наприклад, у завданнях на спрощення виразів потрібно було перейти від розгорнутого запису:

$$\log_2 8 + \log_2 4 - \log_2 16 \tag{1.70}$$

до компактнішої форми, використавши властивості:

$$\log_2 8 + \log_2 4 - \log_2 1\,6 \log_2(8 \cdot 4) - \log_2 1\,6 \log_2 32 - \log_2 1\,6 \log_2 \frac{32}{16} \log_2 2 = 1 \quad (1.71)$$

У завданнях на рівняння учні розв'язували, зокрема,

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+3) = 3 \quad (1.72)$$

із обов'язковим урахуванням області допустимих значень:

$$x - 1 > 0, \quad x + 3 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (1.73)$$

Далі рівняння зводилося до:

$$\log_2\big((x-1)(x+3)\big) = 3(x-1)(x+3) = 2^3 = 8 \quad (1.74)$$

з наступним розв'язанням квадратного рівняння, перевіркою коренів на належність до ОДЗ та записом остаточних відповідей.

Серед завдань середнього рівня були й такі, що перевіряли вміння «читати» графік логарифмічної функції. Учні мали, наприклад, за схематичним графіком визначити, чи відповідає він функції:

$$y = log_2 x \quad \text{чи} \quad yy = log_{1/2} x \quad (1.75)$$

орієнтуючись на те, що при a>1функція y=$\log_a$x зростає, а при 0<a<1 – спадає. На цьому рівні чітко проявилися відмінності між учнями: ті, хто засвоїв властивості логарифмів, упевнено будували ланцюжок перетворень, тоді як частина учнів плутала формули $\log_a(xy)$ та $\log_a(xk)$ або забувала про ОДЗ.

Найскладніші завдання завершували тест і були спрямовані на перевірку глибокого розуміння теми. Вони включали розв’язування нерівностей із логарифмами та завдань із параметром, наприклад:

$$\log_{1/2}(x-1) \leq \log_{1/2}(3x+5) \tag{1.76}$$

де необхідно було одночасно враховувати ОДЗ:

$$x-1>0,\ 3x+5>0 \tag{1.77}$$

та монотонність логарифмічної функції при основі 0<a<1, що змінює знак нерівності:

$$x-1\ \geq 3x+5 \tag{1.78}$$

У комплексних завданнях учням пропонувалося, наприклад, проаналізувати рівняння:

$$\log_2(x^2-5x+6)=\log_2(x-2) \tag{1.79}$$

де потрібно було:

1. записати ОДЗ: x2−5x+6>0, x−2>0;
2. перейти до рівносильного рівняння $x^2-5x+6=x-2$;
3. розв’язати квадратне рівняння;
4. перевірити кожен корінь на належність до ОДЗ.

Такі завдання потребували не лише знання формул, а й уміння спланувати розв’язання, контролювати кожен крок і критично оцінити отриманий результат. Саме ці пункти виявилися найскладнішими — впевнено виконати їх змогла відносно невелика частина учнів, що показало реальний «верхній рівень» математичної компетентності в темі логарифмів.

Апробація тесту серед 20 учнів після завершення вивчення теми дозволила не тільки виміряти загальний рівень засвоєння, а й конкретизувати сильні та слабкі сторони. Було зафіксовано, що більшість учнів упевнено справляються із завданнями типу:

$$\log_3 9,\ \log_4 16,\ \log_5 25 \tag{1.80}$$

і вміють переходити від логарифмічної до показникової форми й навпаки, але значно частіше помиляються в завданнях, де потрібно одночасно використовувати кілька властивостей або працювати з графіками логарифмічних функцій.

Важливою частиною експерименту стали п’ять лабораторних практикумів, у яких логарифми розглядалися вже не як «тема з підручника», а як робочий інструмент для аналізу функцій і моделей. У першій роботі учні знайомилися з ідеєю логарифмічного диференціювання. Наприклад, для функції

$$y = (x^2 + 1)^{\sin x} \tag{1.81}$$

пропонувалося взяти логарифм:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln(x^2 + 1) \tag{1.82}$$

звідки:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2+1} y' == (x^2 + 1)^{\sin x} \left[\cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right] \tag{1.82}$$

Таким чином, учні на практиці переконувалися, що логарифм дозволяє «розкласти» складну показниково-степеневу функцію на суму простіших, з якими легше працювати.

Наступні роботи були пов’язані з інтегралами, де з’являється натуральний логарифм. Учні пригадували, що:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C \tag{1.83}$$

$$\int \frac{3}{2x-1}\, dx = \frac{3}{2}\ln|2x-1| + C \tag{1.84}$$

розкладали раціональні дроби на прості й бачити, як у результаті інтегрування виникають логарифмічні вирази. У задачах прикладного змісту вони обчислювали, наприклад, площу фігури, обмеженої графіком функції y=lnx та віссю абсцис на відрізку [1;e], використовуючи визначений інтеграл:

$$S = \int_1^e \ln x\ dx \tag{1.85}$$

Окремі лабораторні практикуми були присвячені простим диференціальним рівнянням, розв’язки яких природно містять логарифмічні або показникові функції. Так, для моделі експоненційного зростання:

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{1.86}$$

учні знаходили загальний розв’язок:

$$\int \frac{1}{N}\, dN = \int k\ dt \ln|N| = kt + CN(t) = N_0 e^{kt} \tag{1.87}$$

а потім, використовуючи логарифм, розв’язували задачі на знаходження константи k чи часу t, наприклад із умови $N(t1)=2N_0$. Аналогічно розглядалися

моделі радіоактивного розпаду та інші процеси з експоненційною чи логістичною поведінкою.

Усі 20 учнів, які завершили вивчення теми логарифмів у другому семестрі 2025 року, взяли участь і в тестуванні, і в виконанні лабораторних робіт. Аналіз результатів показав природну неоднорідність рівня підготовки: частина школярів упевнено розв’язувала як типові, так і складніші завдання, вільно переходила між формулами, графіками та текстовим описом задач; інші ж продемонстрували достатній рівень у межах стандартних вправ, але відчували труднощі при розв’язуванні логарифмічних нерівностей, аналізі графіків та роботі з моделями реальних процесів.

Комплексна апробація розробленої методики (через тест і систему лабораторних практикумів) дозволила не лише кількісно оцінити рівень математичної компетентності учнів у темі логарифмів, а й якісно виявити типові труднощі, сильні сторони та «проблемні місця». Це створює підґрунтя для подальшого коригування змісту занять, добору задач і форм роботи, а також для формулювання методичних рекомендацій щодо удосконалення навчання логарифмів у старшій школі.

3.2 Аналіз результатів досягнень учнів після проведеної методики

У рамках проведеного оцінювання було використано систему балів, відповідно до якої кожен учень отримав оцінку на основі результатів контрольного тесту. Оцінювання здійснювалося за чіткими категоріями, де кількість набраних балів відповідала рівню знань і вмінь учня. Кожен учасник тестування отримав оцінку, що точно відображала його успішність у виконанні завдань, і була надана згідно з кількістю зароблених балів. Така система дозволяла об'єктивно оцінити рівень засвоєння матеріалу кожним учнем та визначити конкретні проблемні зони, що потребували додаткової уваги. Максимальна кількість балів становила 12, оскільки тест складався з 12 завдань різного рівня складності, кожне з яких оцінювалося в 1 бал. Чітка градація оцінок

дозволяла не тільки виставити підсумкову оцінку, але й надати учням зрозумілий зворотний зв'язок щодо їхнього рівня підготовки.

Учні, які набрали від 10 до 11 балів, отримали оцінку «відмінно» та продемонстрували високий рівень знань і навичок з теми логарифмів. Вони правильно вирішили більшість завдань тесту, показавши глибоке розуміння матеріалу та точність у виконанні всіх типів завдань. Ці учні впевнено працювали з основними визначеннями логарифмів, швидко застосовували їх властивості для спрощення виразів, без помилок розв'язували логарифмічні рівняння та нерівності, а також демонстрували розуміння графіків логарифмічних та експоненціальних функцій. Вони могли не тільки виконувати стандартні обчислення, але й творчо підходили до розв'язування складних завдань, що вимагали поєднання кількох математичних операцій. Такий рівень підготовки свідчить про систематичну роботу над темою, регулярне виконання домашніх завдань та здатність до самостійного аналізу математичних проблем.

Учні, які набрали від 7 до 9 балів, отримали оцінку «добре» та виконали завдання з деякими помилками, але в цілому показали добрі результати. Вони здатні правильно застосовувати основні принципи роботи з логарифмами, розуміють базові властивості логарифмічних функцій та можуть розв'язувати типові завдання. Однак ці учні припустилися незначних помилок у більш складних завданнях, особливо там, де потрібно було одночасно використовувати кілька властивостей логарифмів або здійснювати перетворення між показниковою та логарифмічною формами запису. Деякі помилки були пов'язані з неуважністю при обчисленнях або недостатньо глибоким розумінням окремих аспектів теми, наприклад, роботи з областю допустимих значень або особливостями графіків функцій. Ці учні мають міцну базову підготовку, але потребують додаткової практики для удосконалення навичок та підвищення точності виконання завдань.

Учні, які набрали від 5 до 6 балів, отримали оцінку «задовільно» та показали середній рівень знань з теми логарифмів. Вони виконали основні завдання тесту, що перевіряли базові визначення та найпростіші обчислення, але

деякі моменти залишаються для них незрозумілими або були виконані з помилками. Ці учні часто плутали різні властивості логарифмів, мали труднощі з застосуванням формул у нестандартних ситуаціях та робили помилки при розв'язуванні рівнянь, особливо тих, що вимагали кількох етапів перетворень. Робота з графіками функцій також викликала у них значні труднощі, оскільки вони не завжди розуміли зв'язок між аналітичним виразом функції та її графічним представленням. Такі результати свідчать про наявність прогалин у розумінні базових концепцій та необхідність додаткової роботи над засвоєнням теоретичного матеріалу і розвитком практичних навичок розв'язування задач.

Учні, які набрали від 2 до 4 балів, отримали оцінку «незадовільно» та мали значні проблеми з розумінням матеріалу з теми логарифмів. Вони не змогли правильно виконати більшість завдань тесту, що вказує на серйозні прогалини в знаннях як базових визначень, так і методів роботи з логарифмічними виразами. Ці учні часто не розуміли саму суть логарифму як математичної операції, плутали експоненціальні та логарифмічні функції, не могли застосувати навіть найпростіші властивості логарифмів для обчислень. Помилки були систематичними та стосувалися всіх розділів теми, включаючи визначення, властивості, графіки та розв'язування рівнянь. Для цих учнів необхідна індивідуальна робота з повторення всього матеріалу з самого початку, додаткові пояснення основних концепцій та значна кількість практичних вправ для формування базових навичок роботи з логарифмами. Такий низький рівень результатів може бути пов'язаний з недостатньою увагою на уроках, нерегулярним виконанням домашніх завдань або наявністю прогалин у знаннях з попередніх тем математики, що є необхідними для розуміння логарифмів.

Згідно контрольного тесту та даного оцінювання ми отримали такі результати експерименту (рис. 3.1).

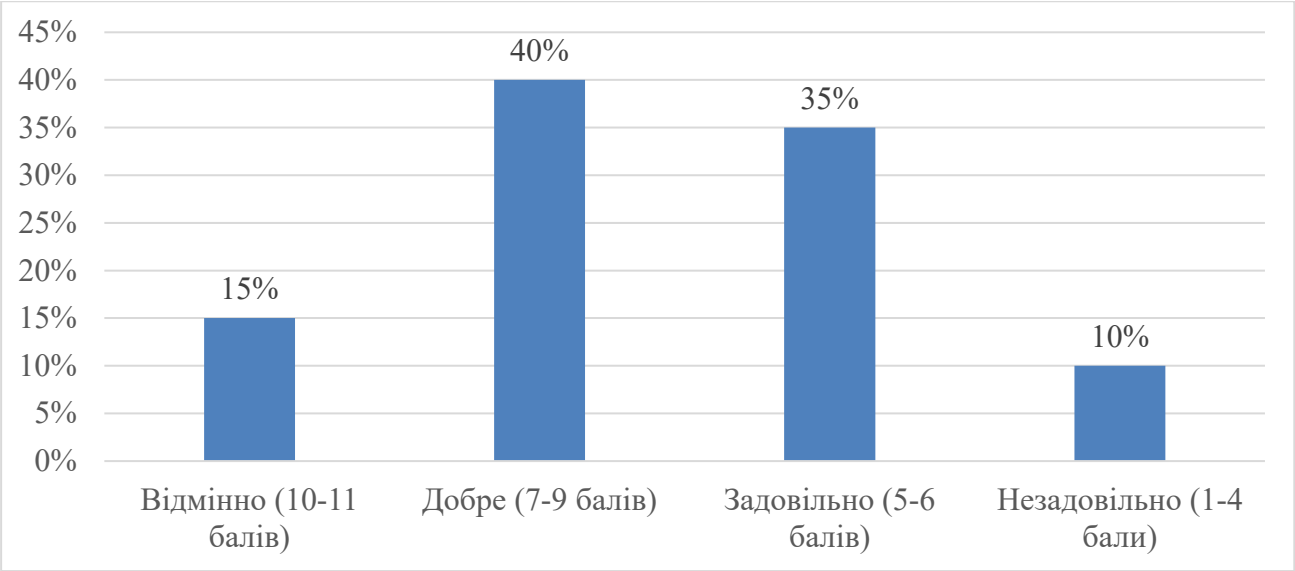


Рис. 3.1. Результати проведеного експерименту згідно контрольного тесту

Отже, згідно з результатами дослідження, найбільша частка учнів (40%) набрала від 7 до 9 балів, що свідчить про хороший рівень знань. Це означає, що більшість учнів продемонстрували достатньо сильне розуміння основних теоретичних аспектів теми, таких як властивості логарифмів, їх застосування в математичних задачах, а також вміння працювати з графіками функцій. Вони впоралися з завданнями, що вимагали базових навичок та знань, але деякі учні все ж допустили помилки або мали труднощі з точністю в обчисленнях. Такі помилки можуть бути спричинені різними факторами: від недооцінки певних аспектів теорії до нестачі практичних навичок. Це вказує на те, що хоча учні і досягли хороших результатів, матеріал ще потребує додаткового закріплення, особливо коли мова йде про більш складніші та комплексніші завдання.

Загалом, ці результати також підтверджують, що використана методика уроків була достатньо ефективною, оскільки більшість учнів продемонстрували позитивний рівень знань. Однак є потреба в більш глибокому розгляді деяких аспектів теми, зокрема тих, що стосуються специфічних властивостей логарифмів та їх застосування в реальних умовах. Адже навіть якщо учні змогли вирішити стандартні завдання, це не завжди означає, що вони до кінця розуміють, як ці знання можуть бути використані в практиці. Наприклад, значення логарифмів у фізичних, економічних або технічних задачах можуть

мати специфічні нюанси, що потребують більш детального вивчення. Крім того, деякі учні могли відчувати труднощі з певними етапами виконання завдань, що пов’язано з нестачею практичних навичок у роботі з функціями.

15% учнів досягли відмінних результатів, набравши від 10 до 11 балів. Це свідчить про те, що ці учні не тільки правильно розв'язали основні завдання тесту, але й продемонстрували глибоке розуміння теоретичних аспектів, таких як логарифмічні властивості, їх взаємозв'язок із експоненціальними функціями, а також можливість застосувати ці знання у різних галузях математики та науки. Вони змогли без помилок пояснити концепції і детально описати процеси, пов'язані з логарифмічними перетвореннями. Такий рівень знань свідчить про високий ступінь сформованості математичної компетентності, здатність до самостійного аналізу та вирішення складних завдань. У майбутньому ці учні можуть успішно застосовувати отримані знання для вирішення більш складних задач, а також для подальшого вивчення суміжних математичних тем.

З іншого боку, 35% учнів набрали від 5 до 6 балів, що вказує на середній рівень знань. Ці учні змогли виконати основні завдання тесту, але стикнулися з певними труднощами при розв’язанні складніших завдань або при застосуванні теоретичних знань до практичних ситуацій. Це може свідчити про певні прогалини в розумінні логарифмічних властивостей або про труднощі з виконанням перетворень між різними математичними формами, зокрема при роботі з функціями або розв’язуванні рівнянь. Для цієї групи учнів важливо провести додаткову роботу над закріпленням матеріалу та розвитку навичок самостійного розв’язування задач. Це може включати більш детальні пояснення теми на додаткових заняттях, а також застосування практичних вправ, які допоможуть усунути прогалини в знаннях.

10% учнів набрали від 1 до 4 балів, що вказує на серйозні проблеми з розумінням матеріалу. Ці учні не змогли правильно виконати більшість завдань, що свідчить про значні прогалини у знаннях та вміннях, пов’язаних із основами логарифмів і експоненціальних функцій. Це може бути результатом недостатнього засвоєння теоретичних аспектів теми або невміння застосовувати

ці знання на практиці. Для цих учнів необхідно провести додаткову роботу, зокрема індивідуальні консультації та заняття, щоб зрозуміти, де саме вони стикаються з труднощами, а також допомогти їм відновити базові знання. Під час таких занять можна детально розглянути основи теорії логарифмів, зробити акцент на найпоширеніших помилках і виправити їх. Це дозволить учням усвідомити важливість знань про логарифми та експоненціальні функції і застосовувати ці знання в майбутньому.

Загалом, аналіз результатів показує, що більшість учнів показали добрі результати, однак є певні труднощі при розв'язуванні більш складних завдань і при застосуванні теоретичних знань до практичних ситуацій. Це свідчить про те, що в процесі навчання важливо забезпечити не лише засвоєння основних понять, але й розвиток навичок самостійного вирішення завдань, особливо тих, які виходять за межі стандартних прикладів. Тому в подальшому важливо приділити увагу не лише теоретичним аспектам, але й забезпечити достатньо практичних завдань, що дозволять учням закріпити свої знання та навички і застосувати їх у різних ситуаціях.

У цілому, результати тесту показують, що учні продемонстрували різний рівень сформованості математичної компетентності. Більшість учнів здобули хороші результати, але є й учні, які потребують додаткової уваги та допомоги для більш глибокого засвоєння матеріалу. Методика уроків, що включала розгляд властивостей логарифмів, графіків, нервісів і їх застосувань, показала свою ефективність для більшості учнів, але необхідно продовжувати роботу над вирішенням проблем у розумінні складних аспектів теми.

Перше завдання, яке стосувалося визначення експоненціальної функції, було важливим для перевірки теоретичних знань учнів щодо різних типів функцій. Більшість учнів, які добре засвоїли матеріал, зуміли швидко і без проблем відповісти на питання, правильно вибравши функцію $y = 2^x$ як експоненціальну. Однак деякі учні, які не до кінця розібралися у відмінностях між експоненціальними, степеневими та лінійними функціями, обирали неправильні варіанти, такі як $y = x^2$ чи y = x. Це свідчить про те, що хоча учні і

мають загальні уявлення про функції, але точне розуміння ідентифікації експоненціальних функцій ще потребує вдосконалення. Особливо помітно це було серед учнів середнього рівня. Проблеми з виконанням цього завдання були пов’язані зі складністю одразу впізнати експоненціальну функцію серед інших типів. І, хоча більшість учнів (близько 75%) зуміли правильно визначити функцію, багато хто витратив більше часу через сумніви та нерозуміння тонкощів теоретичних аспектів.

Друге завдання перевіряло здатність учнів правильно ідентифікувати логарифмічні вирази серед інших математичних формул. Тут результати показали, що учні з високим рівнем підготовки швидко розпізнавали логарифмічний вираз і обирали правильну відповідь. Проте для учнів середнього рівня завдання стало певним викликом. Багато з них плутали логарифмічні вирази з виразами степеневих функцій або з іншими математичними операціями, що вказувало на недостатнє розуміння природи логарифмів. Проблеми виникали через те, що учні не завжди усвідомлювали, що логарифм є зворотнім до піднесення до степеня. Це завдання виявилося складним для 30% учнів, які вибирали не ті варіанти або припускали помилки через недосвідченість з логарифмами. Лише 70% учнів змогли без помилок і швидко виконати це завдання.

Третє завдання вимагало від учнів здатності визначити характер графіка експоненціальної функції. Це завдання стало деяким бар'єром для учнів середнього рівня, оскільки багато хто не був впевнений у тому, як виглядає графік функції $y = 2^x$. Успішно виконали завдання учні, які добре засвоїли характеристики експоненціальних функцій, зокрема їх зростаючий характер і повільний ріст. Однак для решти учнів це завдання стало досить складним. Помилки виникали через непорозуміння стосовно природи графіків, і деякі учні вибирали варіанти, що описують лінійні або параболічні функції, хоча вони не відповідали за характером наданій функції. Підсумково, лише 60% учнів змогли коректно визначити тип графіка, що свідчить про відсутність глибокого розуміння властивостей експоненціальних функцій у частини учнів.

Четверте завдання, яке стосувалося визначення, що таке логарифм, стало для багатьох учнів певним випробуванням. Це питання мало на меті перевірити розуміння базових понять логарифмів, і більшість учнів, які добре засвоїли теорію, без проблем обрали правильну відповідь, адже логарифм є зворотним до піднесення до степеня. Однак серед учнів середнього рівня було кілька, які помилково вибрали варіанти, що описували операції множення або ділення, що свідчить про не зовсім чітке розуміння суті логарифмів. Проблеми виникли саме у тих учнів, які ще не усвідомили логарифм як зворотну операцію до степеня. Протягом виконання цього завдання учні витратили більше часу на осмислення концепції, що також позначилося на результатах. Лише 60% учнів правильно виконали завдання без помилок, що свідчить про те, що частина учнів потребує додаткової роботи над цією темою.

П’яте завдання вимагало від учнів розуміння зв’язку між логарифмами і експоненціальними функціями. Учні, які добре засвоїли концепцію зворотності між логарифмами і експоненціальними функціями, не мали проблем із вибором правильного варіанту і одразу вказали, що це функція, яка є зворотною до експоненціальної функції. Однак деякі учні, які не до кінця розуміли зв’язок між логарифмічною і експоненціальною функцією, помилково вибрали інші варіанти. Це завдання стало складним для 30% учнів, які не могли правильно інтерпретувати функцію та віднести її до відповідної категорії. Завдяки цьому, правильну відповідь вибрали лише 75% учнів, що вказує на те, що розуміння цієї концепції ще не є універсальним серед усіх учнів.

Шосте завдання, яке стосувалося графіка логарифмічної функції $y = \log_2 x$, вимагало від учнів вміння розпізнавати характер графіка логарифмічних функцій, зокрема розуміння того, що графік логарифмічної функції зростає та перетинає вісь x у точці x = 1. Учні, які добре засвоїли теоретичні знання, швидко визначали, що графік функції зростаючий, і знаходили точку перетину з віссю x, яка повинна бути рівною 1. Проте серед учнів середнього рівня було помічено помилки. Деякі з них обирали варіанти, які мали спадні графіки або неправильні точки перетину з осями, що свідчить про недостатнє розуміння базових

властивостей логарифмічних функцій. Це завдання викликало певні труднощі у 35% учнів, які вибрали неправильні варіанти, витрачаючи більше часу на осмислення цього завдання. У результаті 65% учнів змогли правильно вирішити це завдання. Така ситуація показує, що, хоча учні знали загальні властивості логарифмів, у деяких все ще були труднощі з точним виведенням та визначенням характеристик графіка.

Сьоме завдання стосувалося графіка функції $y = 3^x$. Це завдання вимагало від учнів розуміння поведінки експоненціальних функцій, зокрема того, що графік функції зростає, наближаючись до осі x знизу. Більшість учнів, які добре засвоїли теоретичний матеріал, без проблем вибрали правильну відповідь. Проте для учнів середнього рівня завдання виявилося складним. Частина учнів плутала цей графік з графіком лінійних функцій або функцій, що спадають, що свідчить про неповне розуміння особливостей експоненціальних функцій. Це завдання виявилося важким для 30% учнів, які вибрали помилкові варіанти. Всього 70% учнів правильно визначили тип графіка, але інші витратили більше часу, намагаючись розібратися з характеристиками функції.

Восьме завдання стосувалося властивостей логарифмів, зокрема тієї властивості, що логарифм добутку чисел розкладається на суму логарифмів. Це питання було орієнтоване на перевірку здатності учнів застосовувати властивості логарифмів в практичних задачах. Учні з високим рівнем знань швидко вибрали правильну відповідь, оскільки добре знали ці властивості. Однак серед учнів середнього рівня виникли труднощі, зокрема вони плутали множення в логарифмах з додаванням логарифмів для додавання чисел. Це свідчить про неповне розуміння або неуважність при застосуванні теоретичних знань на практиці. Завдання виявилося складним для 40% учнів, які зробили помилки. Лише 60% учнів правильно виконали завдання, що вказує на необхідність більше працювати над розумінням властивостей логарифмів та їх застосуванням.

Дев’яте завдання було спрямоване на перевірку знань учнів про перетворення логарифмів у показникові рівняння. Це завдання вимагало не

тільки знання теорії, але й уміння правильно застосовувати ці перетворення. Учні, які добре засвоїли матеріал, без проблем виконали завдання. Проте інші учні мали труднощі з правильною інтерпретацією перетворення логарифмів у показники. Деякі з них плутали це перетворення з іншими операціями, що призводило до помилок. Завдання стало важким для 50% учнів, які не змогли правильно здійснити перехід між логарифмом і показником, витрачаючи більше часу на осмислення цього перетворення. У результаті лише 50% учнів виконали завдання без помилок, що свідчить про необхідність кращого розуміння переходу між різними математичними концепціями.

Десяте завдання було на розв’язання логарифмічного рівняння $\log_3 x = 2$. Це завдання вимагало вміння застосовувати логарифмічні рівняння для знаходження розв'язку. Учні, які добре засвоїли методи роботи з логарифмами, швидко перетворювали рівняння в показникову форму і знаходили відповідь. Проте деякі учні з середнім рівнем підготовки допускали помилки при перетвореннях рівняння або неправильно застосовували властивості логарифмів. Ці помилки свідчать про те, що учні не завжди правильно розуміють і використовують теоретичні знання для вирішення практичних завдань. Завдання стало складним для 40% учнів, які неправильно застосували перетворення рівнянь або припустилися арифметичних помилок. 60% учнів змогли правильно вирішити рівняння, що свідчить про гарний рівень підготовки в учнів, які усвідомлюють, як працювати з логарифмічними рівняннями.

Одинадцяте завдання, яке стосувалося обчислення значення $\log_2 32$, було насправді дуже простим для учнів, які добре засвоїли основи логарифмів і розуміли, що логарифм — це показник, до якого потрібно піднести основу (в даному випадку 2), щоб отримати число (32). Ті учні, хто був обізнаний у логарифмах, швидко визначали, що $32 = 2^5$, отже $\log_2 32 = 5$. Це завдання вдалося вирішити 80% учнів, причому вони зробили це досить швидко, адже процес не вимагав складних перетворень або довгих розрахунків.

Однак серед учнів, які мали проблеми з логарифмами, виникли труднощі. Частина з них не знала, як правильно використовувати властивості логарифмів

для вирішення задачі, або взагалі не розуміла, що таке логарифм як операція. В результаті вони могли заплутатися, обираючи інші варіанти відповідей, або робити помилки при спробах визначити значення цього логарифму. Це свідчить про те, що не всі учні до кінця розуміли логарифмічні перетворення, і для деяких з них це було новим і складним поняттям. 20% учнів не змогли правильно відповісти через недостатнє розуміння або через нерозуміння властивостей логарифмів.

Дванадцяте завдання, яке стосувалося перетворення показникового рівняння в логарифмічну форму, виявилося складнішим для учнів, які не мали чіткої уяви про взаємозв'язок між експоненціальними і логарифмічними функціями. Учні, які добре засвоїли цю тему, відразу визначили, що рівняння $2^x = 16$ є еквівалентом логарифмічного рівняння $\log_2 16 = x$. Для них перехід між показниками та логарифмами був простим і швидким, адже вони добре розуміли, що логарифм є зворотною операцією до піднесення до степеня.

Проте для деяких учнів, особливо середнього рівня підготовки, це завдання виявилося більш складним. Вони плутали, як саме застосовувати логарифм до показникових рівнянь, або неправильно розуміли саму сутність перетворень. Це приводило до вибору невірних варіантів відповідей, оскільки учні не знали, як правильно перейти від показникової форми до логарифмічної. Завдання успішно виконали лише 70% учнів, а решта – 30% - допустили помилки через непорозуміння теоретичних основ перетворення рівнянь. Ці помилки свідчать про те, що у багатьох учнів не сформовано чітке розуміння зв’язку між різними математичними операціями, і вони все ще плутали основні правила перетворення рівнянь з показникової на логарифмічну форму.

Загальний аналіз результатів виконання завдань вказує на те, що більшість учнів мають базові знання про логарифми та експоненціальні функції, однак, з певними труднощами впоралися з більш складними питаннями, що вимагали глибшого розуміння теоретичних аспектів цих тем.

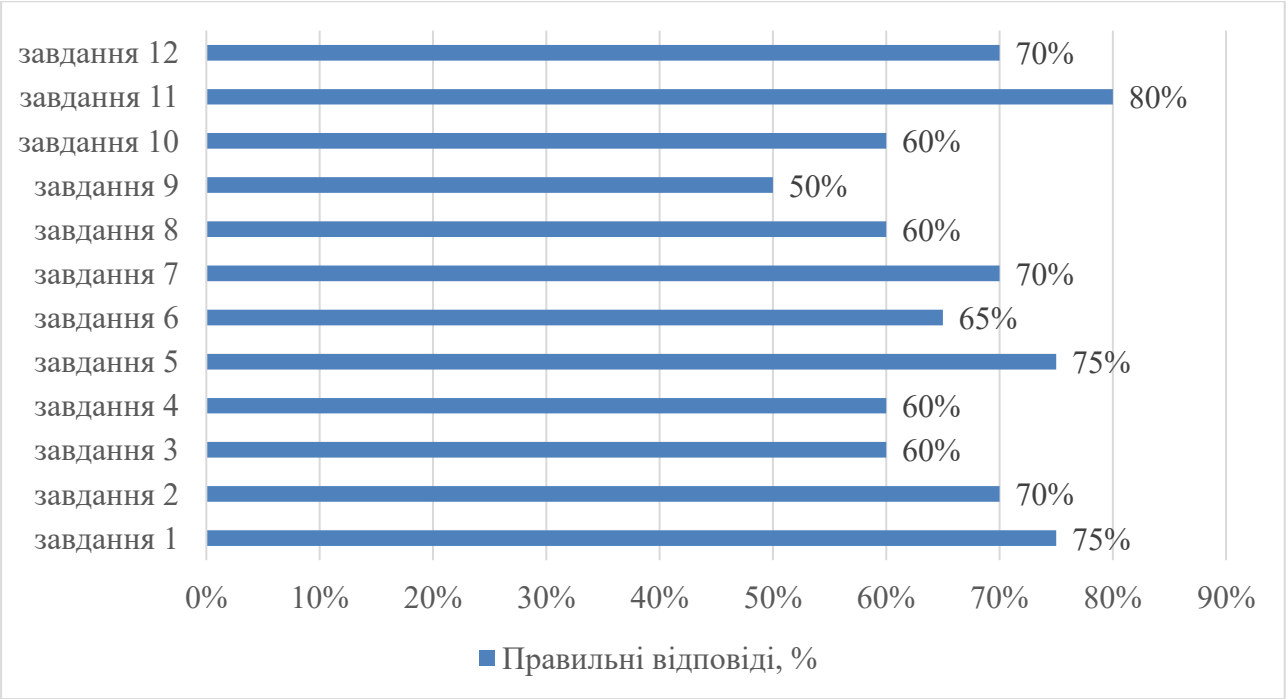


Рис. 3.2. Відсоток правильних відповідей по завданнях контрольного тесту

Більшість учнів правильно виконали завдання, що перевіряли базові знання про логарифми та експоненціальні функції, зокрема розрізнення експоненціальних функцій від лінійних чи степеневих, а також основи визначення логарифмів. Однак, коли завдання ставили питання про взаємозв'язок між різними типами функцій, зокрема при роботі з графіками функцій, виникали труднощі, зокрема через недостатнє усвідомлення властивостей графіків логарифмічних та експоненціальних функцій.

Проблеми з графіками функцій, такими як визначення характеру зростаючих чи спадних графіків, а також правильне виведення точок перетину з осями, свідчать про те, що деяким учням не вистачає досвіду у візуалізації функцій і їхніх властивостей. Так, завдання, яке потребувало ідентифікації зростаючого графіка функції $y = 2^x$, змогли правильно виконати лише 60% учнів. Подібні труднощі виникали при визначенні перетину графіка функції $y= \log_2 x$ з віссю x, де правильну відповідь змогли дати лише 65% учнів.

Особливе занепокоєння викликають питання, що стосуються перетворення рівнянь з показникової форми в логарифмічну і навпаки. Це завдання стало серйозною перепоною для 30-40% учнів, що свідчить про їхні проблеми з

розумінням основних принципів роботи з логарифмами та показниками. І хоча деякі учні швидко і точно вирішили ці завдання, в загальному можна сказати, що саме ці теми потребують додаткової уваги.

Завдання на розпізнавання логарифмічних виразів або перетворення рівнянь логарифмів в показникові форми виявилися складними для тих учнів, які не мають достатнього рівня теоретичних знань. Це підтверджується тим, що лише 70-75% учнів змогли впоратися з завданнями на визначення правильного виразу для логарифма або з перетворенням рівнянь. Для решти це стало проблемою, і вони, ймовірно, не усвідомлювали, як правильно застосувати властивості логарифмів у практичних задачах.

Окрім контрольного тесту, важливим інструментом оцінювання математичної компетентності учнів стали п'ять лабораторних практикумів, кожен з яких був спрямований на поглиблене вивчення специфічних аспектів застосування логарифмів у різних галузях математики. Ці практикуми дозволили не тільки перевірити теоретичні знання учнів, але й оцінити їхню здатність застосовувати логарифми в складних математичних контекстах, що виходять за межі шкільної програми та готують учнів до подальшого вивчення вищої математики.

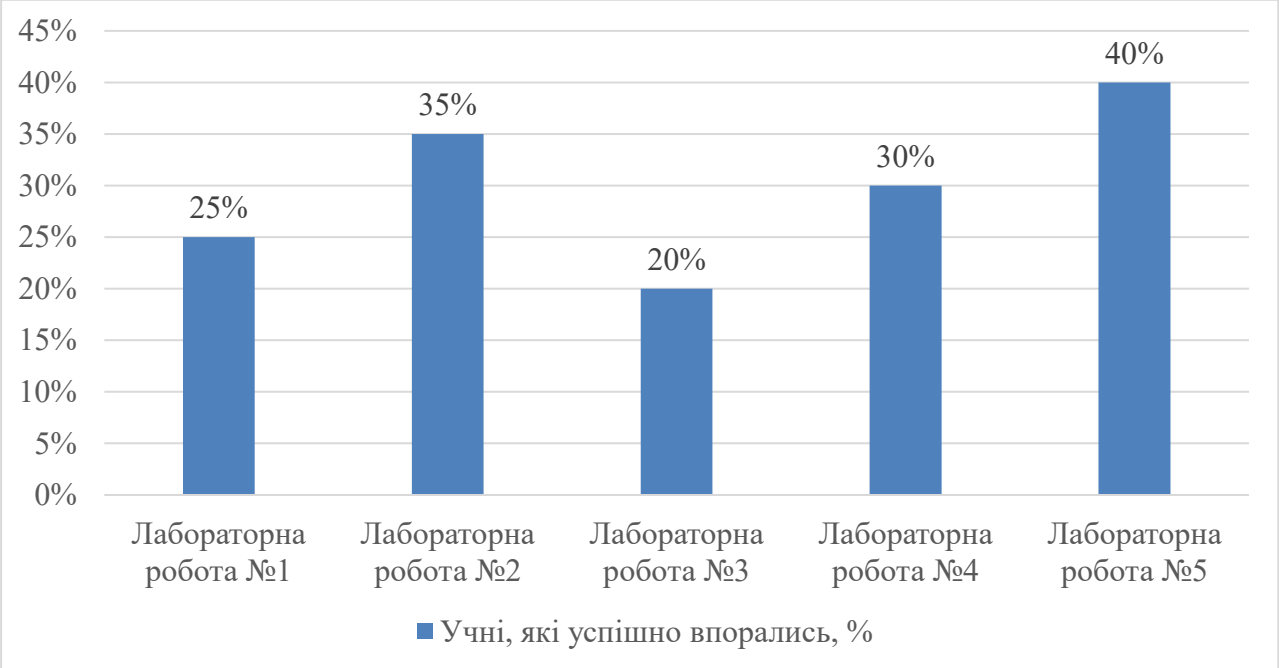


Рис. 3.3. Відсоток учнів, які успішно виконали всі завдання лабораторних практикумів

Перша лабораторна робота, присвячена логарифмічному диференціюванню складних функцій, виявилася найбільш складною для більшості учнів. Результати показали, що лише 25% учнів змогли успішно впоратися з усіма завданнями цього практикуму без значних помилок. Основні труднощі виникли при роботі з показниково-степеневими функціями виду $y = f(x)^{g(x)}$, де учні мали спочатку прологарифмувати обидві частини рівняння, а потім здійснити диференціювання. Багато учнів не розуміли, чому саме логарифмування спрощує процес знаходження похідної, і намагалися використовувати стандартні правила диференціювання, що призводило до помилок. Близько 40% учнів мали труднощі з правильним застосуванням формули для логарифмічної похідної, особливо коли мова йшла про добуток багатьох функцій або складні частки. Учні часто плутали, коли потрібно додавати логарифмічні похідні, а коли віднімати, що свідчить про недостатнє розуміння зв'язку між операціями множення і ділення та їх логарифмічними еквівалентами. Особливо складними виявилися завдання на знаходження похідних функцій типу $y = (\sin x)^{\cos x}$, де потрібно було не лише застосувати логарифмічне диференціювання, але й правильно використати правило ланцюга. Тільки найсильніші учні (близько 15%) змогли без помилок розв'язати прикладні задачі на знаходження швидкості зміни функції або дослідження функції на екстремум.



Рис. 3.4. Результати виконання завдань Лабораторної роботи №1

Загалом, цей практикум показав, що тема логарифмічного диференціювання потребує значно більше часу на засвоєння та більшої кількості підготовчих вправ.

Друга лабораторна робота з інтегрування з використанням логарифмічних функцій показала дещо кращі результати – приблизно 35% учнів успішно виконали всі завдання. Учні краще впоралися з базовими інтегралами, де правильні відповіді дали близько 70% учнів. Однак складнощі почалися, коли потрібно було застосовувати метод інтегрування частинами для інтегралів. Близько 45% учнів неправильно вибирали, яку частину виразу позначити як u, а яку як dv, що призводило до ускладнення обчислень або неправильних результатів. Особливо проблемним виявився розділ про розкладання раціональних функцій на прості дроби. Лише 30% учнів змогли правильно розкласти складні дроби на прості і потім проінтегрувати їх. Багато учнів робили помилки при знаходженні невідомих коефіцієнтів у розкладі, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів. Деякі учні (близько 25%) взагалі не розуміли, навіщо потрібен цей метод, і намагалися інтегрувати складні раціональні функції безпосередньо, що неможливо. Визначені інтеграли з логарифмами виявилися

більш доступними – близько 50% учнів правильно обчислили такі інтеграли, хоча і витратили на це значно більше часу, ніж очікувалося.

Третя лабораторна робота, присвячена диференціальним рівнянням з логарифмічними функціями, стала справжнім викликом для учнів, оскільки ця тема виходить за межі стандартної шкільної програми. Результати показали, що лише 20% учнів змогли успішно розв'язати більшість запропонованих рівнянь. Рівняння з роздільними змінними, де логарифми з'являлися природним чином після розділення змінних, викликали труднощі у 50% учнів. Багато хто не розумів, як правильно проінтегрувати вирази з логарифмами після розділення змінних, або робив помилки при знаходженні константи інтегрування. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку з логарифмічними коефіцієнтами виявилися ще складнішими – тільки 25% учнів змогли правильно знайти інтегруючий множник і розв'язати рівняння. Особливо цікавими виявилися прикладні задачі на моделювання експоненційного та логістичного зростання, де учні мали можливість побачити реальне застосування диференціальних рівнянь з логарифмами. Однак лише 15% учнів змогли правильно скласти модель та розв'язати відповідне рівняння. Багато учнів (близько 60%) висловлювали думку, що цей практикум був занадто складним для їхнього рівня підготовки, хоча деякі найсильніші учні, навпаки, відзначили, що саме ця робота була найцікавішою, оскільки показала зв'язок математики з реальними процесами в природі та суспільстві.

Четверта лабораторна робота про логарифмічні ряди та їх збіжність виявилася найбільш теоретично насиченою і вимагала від учнів глибокого розуміння математичних концепцій. Приблизно 30% учнів успішно виконали всі завдання цього практикуму. Дослідження збіжності рядів з використанням інтегрального критерію Коші викликало труднощі у 55% учнів, особливо коли потрібно було застосовувати цей критерій до рядів виду $\sum(1/(n(\ln n)^2))$. Багато учнів не розуміли зв'язку між збіжністю ряду та збіжністю відповідного невласного інтегралу. Знаходження радіуса збіжності степеневих рядів з логарифмічними коефіцієнтами виявилося більш доступним – близько 45% учнів

правильно застосували формулу Коші-Адамара. Розклад функції ln(1+x) у степеневий ряд та використання цього розкладу для наближених обчислень викликало інтерес у учнів, і близько 40% змогли правильно обчислити ln(1.1) з заданою точністю. Однак завдання на дослідження умовної та абсолютної збіжності знакозмінних рядів з логарифмами виявилося складним для більшості – лише 25% учнів впоралися з цими завданнями. Асимптотичні розклади та формула Стірлінга викликали найбільше запитань, і тільки найсильніші учні (10-15%) змогли застосувати ці знання на практиці.

П'ята лабораторна робота про застосування логарифмів у теорії ймовірностей та статистиці виявилася найбільш практично орієнтованою і викликала найбільший інтерес у учнів. Близько 40% учнів успішно виконали всі завдання цього практикуму. Робота з логарифмічною функцією правдоподібності та її застосування для оцінювання параметрів розподілу виявилася зрозумілою для 50% учнів, особливо після детальних пояснень про те, чому логарифмування спрощує обчислення при роботі з добутками малих ймовірностей. Вивчення логнормального розподілу та його властивостей викликало труднощі у 45% учнів, особливо при обчисленні математичного сподівання та дисперсії. Багато учнів плутали параметри логнормального розподілу з параметрами нормального розподілу, що призводило до неправильних результатів. Логарифмічна регресія виявилася більш доступною темою – близько 55% учнів правильно провели логарифмічну регресію для наданих даних та інтерпретували результати. Учні добре зрозуміли, що логарифмічне перетворення даних може лінеаризувати нелінійні залежності, що спрощує аналіз. Логістична регресія та робота з логіт-трансформацією викликала труднощі у 50% учнів, особливо при інтерпретації коефіцієнтів моделі та відношення шансів. Інформаційні критерії AIC та BIC та їх застосування для вибору моделі виявилося складною темою – лише 35% учнів правильно застосували ці критерії. Однак практична спрямованість цього практикуму, з прикладами застосування логарифмів у реальному статистичному аналізі даних, викликала найбільший позитивний відгук серед учнів.

Загальний аналіз результатів виконання лабораторних практикумів показав значну диференціацію в рівні підготовки учнів.

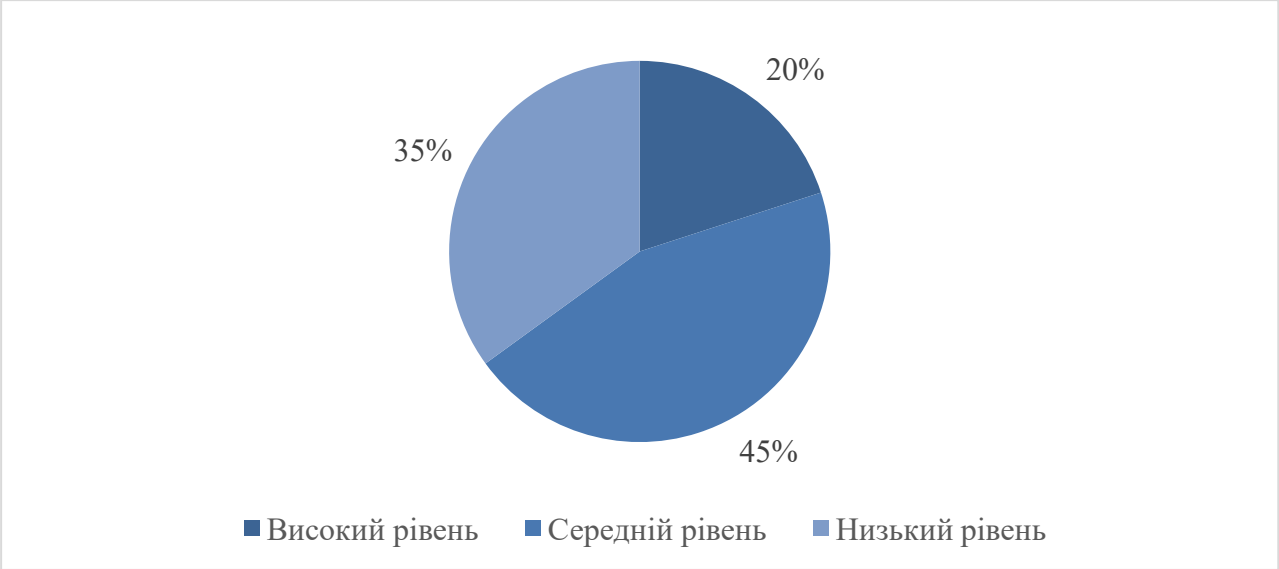


Рис. 3.5. Розподіл учнів за рівнями підготовки на основі результатів лабораторних практикумів

Найсильніші учні (15-20%) змогли успішно виконати більшість завдань у всіх п'яти практикумах, демонструючи не тільки міцні теоретичні знання, але й здатність застосовувати їх у нових, нестандартних ситуаціях. Ці учні показали високий рівень математичної зрілості та готовності до вивчення вищої математики. Учні середнього рівня (40-45%) змогли впоратися з базовими завданнями в кожному практикумі, але мали значні труднощі зі складнішими задачами, що вимагали глибшого розуміння та творчого підходу. Слабші учні (35-40%) відчували серйозні труднощі з більшістю завдань, особливо в перших трьох практикумах, які вимагали знання диференціального та інтегрального числення. Лабораторні практикуми виявилися цінним інструментом не тільки для оцінювання знань учнів, але й для їхнього інтелектуального розвитку, оскільки вони познайомили учнів з застосуванням логарифмів у різних галузях математики та показали зв'язок шкільної математики з вищою математикою, що вивчається в університетах.

Отже, порівняння результатів контрольного тесту та лабораторних практикумів виявило суттєві відмінності у рівні складності та успішності виконання завдань учнями.

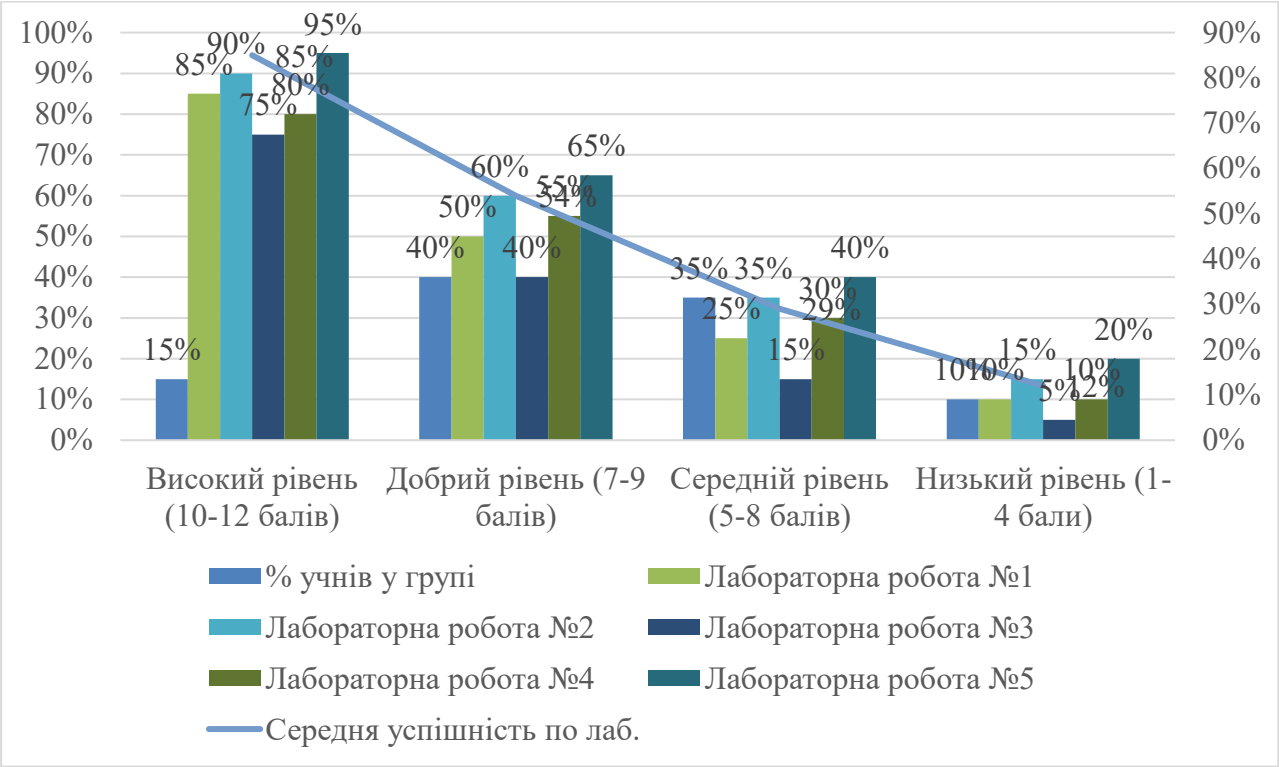


Рис. 3.6. Порівняння результатів контрольного тесту та лабораторних практикумів

Контрольний тест, орієнтований на базові знання про логарифми та експоненціальні функції, показав, що 40% учнів досягли хороших результатів (7-9 балів), 15% - відмінних (10-11 балів), 35% - задовільних (5-6 балів), а 10% отримали незадовільні оцінки (2-4 бали). Найуспішнішими виявилися завдання на обчислення простих логарифмів та визначення базових понять, де правильність відповідей сягала 70-80%. Водночас лабораторні практикуми, які вимагали застосування логарифмів у контексті вищої математики, виявилися значно складнішими. Успішність виконання всіх завдань практикумів коливалася від 20% (диференціальні рівняння) до 40% (статистика та теорія ймовірностей), що значно нижче за показники контрольного тесту. Особливо складними стали теми логарифмічного диференціювання (25% успішності) та диференціальних рівнянь (20% успішності), тоді як практикум зі статистики

викликав найбільший інтерес та показав кращі результати. Загалом, аналіз засвідчив, що більшість учнів володіють базовими знаннями про логарифми, однак застосування цих знань у складних математичних контекстах потребує додаткової підготовки та значно глибшого розуміння теоретичних основ.

Висновки до третього розділу

Отже, проведене дослідження продемонструвало неоднорідні результати серед учнів 11 класу під час вивчення теми логарифмів. Контрольний тест виявив, що найбільша частка учнів (40%) набрала від 7 до 9 балів, що свідчить про достатній рівень засвоєння базових теоретичних концепцій. Водночас лише 15% учнів досягли відмінних результатів, демонструючи глибоке розуміння властивостей логарифмів та здатність застосовувати їх у нестандартних ситуаціях. 35% класу показали задовільні результати, а 10% учнів отримали незадовільні оцінки через суттєві прогалини у знаннях. Аналіз окремих завдань показав, що учні успішно впоралися з простими обчисленнями та визначенням базових понять, де правильність відповідей сягала 70-80%. Проте складніші завдання, що вимагали перетворення показникових рівнянь у логарифмічну форму або роботи з графіками функцій, викликали значні труднощі у 30-40% учасників тестування.

Лабораторні практикуми виявилися набагато складнішими за контрольний тест, оскільки вимагали застосування логарифмів у контексті вищої математики. Найважчою стала перша робота з логарифмічного диференціювання, де лише 25% учнів успішно виконала всі завдання. Учні відчували труднощі при роботі з показниково-степеневими функціями, не розуміючи переваг логарифмування для спрощення обчислень. Друга лабораторна робота з інтегрування показала дещо кращі результати (35% успішності), хоча розкладання раціональних функцій на прості дроби залишалося проблемним для більшості. Третій практикум з диференціальних рівнянь став найскладнішим випробуванням, де тільки 20% учнів змогли впоратися з більшістю завдань. Четверта робота про логарифмічні ряди показала 30% успішності, при цьому найбільше труднощів

викликало застосування інтегрального критерію Коші. П'ятий практикум зі статистики виявився найбільш практично орієнтованим та цікавим для учнів, досягнувши 40% успішності виконання.

Порівняльний аналіз виявив суттєву різницю між володінням базовими знаннями та здатністю застосовувати їх у складних математичних контекстах. Найсильніші учні (15-20%) успішно впоралися з більшістю завдань у всіх практикумах, демонструючи високий рівень математичної зрілості. Учні середнього рівня (40-45%) виконали базові завдання, але мали труднощі зі складнішими задачами творчого характеру. Слабші учні (35-40%) відчували серйозні проблеми з більшістю завдань, особливо тих, що вимагали знання диференціального та інтегрального числення. Результати дослідження чітко показали необхідність посилення практичної складової навчання, більшої уваги до перетворень між різними формами запису рівнянь та систематичної роботи з графіками функцій для формування цілісної математичної компетентності учнів.

ВИСНОВКИ

Отже, в ході написання дипломної роботи на тему «Методологія формування математичної компетентності учнів старших класів під час вивчення логарифмів», було повністю досягнуто поставлену мету, а саме розроблено методику формування математичної компетентності учнів старших класів під час вивчення логарифмів, зокрема у контексті сучасних педагогічних підходів, інтерактивних методів та диференційованих завдань.

Розглянувши основні поняття роботи, зазначимо, що математична компетентність - це комплексним поняттям, що охоплює знання, вміння, навички та особистісні якості, які необхідні для ефективного виконання математичних завдань. Вона включає не лише теоретичні знання, а й здатність використовувати математичні методи в реальних ситуаціях, вирішувати проблеми та розвивати аналітичне мислення. Математична компетентність складається з кількох складових: мотиваційної, когнітивної, діяльнісної, ціннісно-рефлексивної та емоційно-вольової, і її метою є не тільки засвоєння математичних знань, а й формування особистісних рис, які важливі для професійної діяльності. Вона є важливим засобом для вирішення різноманітних практичних і теоретичних задач.

Дослідивши особливості навчання логарифмів у старших класах, можемо пояснити, що логарифм — це математична операція, що є зворотною до піднесення числа до степеня. Логарифм визначає, в якому степені треба підняти певне число (основу), щоб отримати інше число. Логарифмічна функція — це функція, яка виражається через логарифм, де значення змінної виводиться за допомогою логарифмічної операції.

Логарифмічні функції займають важливе місце в курсі алгебри та початків аналізу для 11 класу, оскільки вони є не лише теоретично важливими, але й мають численні практичні застосування. Учні не тільки знайомляться з основними властивостями логарифмів, але й вчаться будувати їх графіки та використовувати для розв'язування рівнянь і нерівностей. Важливим етапом є

освоєння логарифмічних тотожностей, які дозволяють виконувати складніші обчислення та перетворення виразів. Проте, незважаючи на важливість цих знань, у підручниках все ще недостатньо прикладних задач, що ускладнює застосування теоретичних знань на практиці та сповільнює процес навчання.

Систематизувавши існуючі методичні підходи до вивчення логарифмів, можемо виділити декілька з них. Вивчення логарифмів вимагає комплексного підходу, який включає різноманітні методи навчання. Підходи, такі як проблемне навчання, інтерактивне навчання, диференційоване навчання та використання сучасних технологій, дозволяють учням не лише засвоїти теоретичні знання, а й розвивати практичні навички їх застосування. Використання графічних методів, проектного навчання та формувального оцінювання допомагає покращити розуміння матеріалу та підвищує математичну компетентність учнів. Такий підхід забезпечує всебічний розвиток математичних навичок, необхідних для розв'язування реальних задач.

З метою формування математичної компетентності при вивченні логарифмів, було розроблено методику на на базі стандартної програмі з алгебри для 11-го класу. Методика включає серію уроків, що охоплюють основні поняття логарифмів, їх властивості та застосування, вона включає завдання різної складності, самостійні роботи (після 3-го та 7-го уроків) для перевірки знань, контрольний тест та оцінювання математичної компетентності. Вона також використовує міжпредметні зв'язки та враховує психологічні аспекти навчання логарифмів. Вона є ефективним інструментом у процесі формування математичної компетентності учнів, і з часом може бути доповнена новими інструментами і підходами для ще більшої інтерективності та залучення учнів до самостійної роботи.

Розробивши рекомендації для учителів щодо формування математичної компетентності у 11 класі під час вивчення логарифмів, зазначимо, що вчитель повинен не тільки пояснювати основні теоретичні аспекти теми, але й сприяти розвитку критичного мислення та творчих здібностей учнів, допомагаючи їм побачити застосування логарифмів у реальних ситуаціях. Використання

сучасних технологій, інтерактивних завдань і міжпредметних зв'язків дозволяє зробити навчання більш цікавим, наочним і практично орієнтованим. Важливо також розвивати у учнів навички самостійного мислення, а також допомагати їм долати труднощі та працювати з помилками. Завдяки комплексному підходу, вчитель може створити умови для ефективного засвоєння матеріалу та розвитку математичних компетенцій, що стане основою для подальших досягнень учнів у математичному навчанні та професійній діяльності.

З метою перевірки ефективності розробленої методики на уроках алгебри, було створено контрольний тест на 12 запитань, що був апробований серед 20 учнів 11 класу. Результати тестування показали, що 40% учнів досягли хорошого рівня знань, набравши 7-9 балів. Це свідчить про гарне засвоєння основних теоретичних аспектів теми, таких як властивості логарифмів і основи їх застосування, однак деякі учні все ж мали труднощі з точністю виконання завдань, що вказує на потребу в подальшому закріпленні матеріалу. 15% учнів набрали 10-11 балів, що свідчить про високий рівень розуміння матеріалу. Ці учні не тільки виконали завдання правильно, але й продемонстрували глибоке усвідомлення властивостей логарифмів та їх застосування, зокрема при роботі з графіками функцій. 35% учнів отримали 5-6 балів, що вказує на середній рівень знань. Вони змогли виконати базові завдання, але мали труднощі з більш складними завданнями, що потребували глибшого розуміння теоретичних аспектів і роботи з графіками. 10% учнів набрали 1-4 бали, що свідчить про серйозні прогалини в знаннях. Ці учні не змогли правильно виконати більшість завдань тесту, що вказує на необхідність значної додаткової роботи для покращення розуміння основних понять, зокрема роботи з логарифмічними рівняннями та графіками.

Окрім контрольного тесту, важливим компонентом апробації методики стали 5 лабораторних практикумів, які охоплювали застосування логарифмів у вищій математиці. Перший практикум з логарифмічного диференціювання показав найнижчі результати - лише 25% учнів успішно виконали всі завдання, що пов'язано зі складністю роботи з показниково-степеневими функціями.

Другий практикум з інтегрування продемонстрував 35% успішності, де основні труднощі виникли при розкладанні раціональних функцій на прості дроби. Третій практикум з диференціальних рівнянь виявився найскладнішим - тільки 20% учнів впоралися з більшістю завдань, оскільки ця тема значно виходить за межі шкільної програми. Четвертий практикум про логарифмічні ряди показав 30% успішності, причому найбільше труднощів викликало застосування інтегрального критерію Коші та дослідження збіжності рядів. П'ятий практикум зі статистики та теорії ймовірностей виявився найбільш успішним - 40% учнів виконали всі завдання, адже він був найбільш практично орієнтованим і демонстрував реальне застосування логарифмів у статистичному аналізі, логарифмічній регресії та роботі з логнормальним розподілом. Загалом лабораторні практикуми показали значну диференціацію у рівні підготовки учнів: найсильніші 15-20% учнів успішно впоралися з більшістю завдань у всіх практикумах, 40-45% учнів середнього рівня виконали базові завдання, але мали труднощі зі складнішими задачами, а 35-40% слабших учнів відчували серйозні проблеми з більшістю завдань, особливо тих, що вимагали знання диференціального та інтегрального числення.

Отже, у ході написання дипломної роботи було розроблено ефективну методику формування математичної компетентності учнів старших класів під час вивчення логарифмів, яка включає сучасні педагогічні підходи, інтерактивні методи та диференційовані завдання. Методика передбачає використання різноманітних підходів, таких як проблемне та інтерактивне навчання, графічні методи, проектне навчання і оцінювання знань. Результати тестування показали, що більшість учнів добре засвоїли теоретичний матеріал, хоча деяким потрібна додаткова підтримка. Таким чином, методика є ефективним інструментом для формування математичної компетентності учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Х.: Гімназія, 2011.331 с.

2. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. Х.: Гімназія, 2011.448 с.

3. Алгебра: підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Х.: Гімназія, 2011. Ч. 2. 272 с.

4. Математика. 11 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко Рівень стандарту. Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2011.480 с.

5. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Алгебра (алгебра і початки аналізу):підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень. К.: Освіта, 2011.400 с

6. Букалов Л., Васильєва Д. Формувальне оцінювання у навчанні математики: методичний посібник. К.: Видавничий дім «Освіта», 2025. 31 с.

7. Головань М.С. Математичні компетентності чи математична компетентність? Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо- математичного циклу «ІТМ*плюс-20012»: матеріали міжнародної науково-методичної конференції. Виробничо-видавниче підприємство «Мрія», 2012. С. 36-38.

8. Головань М.С. Математична компетентність: сутність та структура. *Науковий вісник Східноєвропейського національного університету.* 2014. №1. С. 35-39.

9. Гриневич Т.О. Логарифмічна функція, її графік і властивості. Методичні рекомендації педагогам для практичного застосування. URL: https://nmc-pto.rv.ua/DOK/TG/TG3/Log-funkcii.pdf (дата звернення 23.02.2025)

10. Гриневич Т.О. Проблемний метод навчання на уроках математики (Методичні рекомендації педагогам для практичного застосування). ДПТНЗ СПАЛ. 2010. 16 с.

11. Захарова Г., Лемешко К. Теоретичний аналіз визначення математичної компетентності учнів у роботах українських та зарубіжних вчених. *Освіта. Інноватика. Практика*. 2022. Вип. 10 (7). С. 32-38.

12. Зіненко І.М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології.* 2009. № 2. С. 165-174.

13. Комар О. Уроки математики – за інтерактивними технологіями. URL: https://dspace.udpu.edu.ua/bitstream/6789/378/1/urok_matematuku_za_int.pdf (дата звернення 24.02.2025)

14. Компетенція і компетентність: досвід теорії, теорія досвіду. URL: https://core.ac.uk/download/pdf/324272272.pdf (дата звернення 23.02.2025)

15. Леонтян М.А. Поняття «компетенція» і «компетентність» у теорії освіти. *Наукові праці Чорноморського державного університету імені Петра Могили комплексу «Києво-Могилянська академія». Серія: педагогіка*. 2012. Т. 188. Вип. 176. С. 73-75.

16. Логарифм числа. Основні логарифмічні тотожності. Тотожні перетворення логарифмічних виразів. URL: https://vseosvita.ua/lesson/loharyfm-chyslaosnovni-loharyfmichni-totozhnostitotozhni-peretvorennia-loharyfmichnykh-vyraziv-227238.html (дата звернення 24.02.2025)

17. Логарифмічні нерівності. URL: https://www.miyklas.com.ua/p/algebra/11-klas/pokaznikova-i-logarifmichna-funktciyi-15299/logarifmichni-nerivnosti-15314/re-b7e279b0-6b5c-4c94-a87f-d3f539e5127b (дата звернення 24.02.2025)

18. Логарифмічні функції та їх графіки. URL: https://ukrayinska.libretexts.org/Математика/Алгебра/Книга%3A_Розширена_алгебра/07%3A_Експоненціальні_та_логарифмічні_функції/7.03%3A_Логарифмічні_функції_та_їх_графіки (дата звернення 24.02.2025)

19. Математика (рівень стандарту). Програма для 10-11-х класів ЗНЗ. URL: https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58878/ (дата звернення 23.02.2025)

20. Методика вивчення показникової та логарифмічної функцій в курсі старшої школи. URL: https://repository.rshu.edu.ua/id/eprint/13399/1/Коробка%20Аня.pdf (дата звернення 23.02.2025)

21. Методика математики. Диференціація навчання. URL: https://t-cherkasova.blogspot.com/2014/11/blog-post_1.html (дата звернення 24.02.2025)

22. Навчайте та вивчайте математику. URL: https://www.geogebra.org/?lang=uk (дата звернення 24.02.2025)

23. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx (дата звернення 23.02.2025)

24. Проект «Чи потрібно вивчати логарифми?». URL: https://naurok.com.ua/proekt-chi-potribno-vivchati-logarifmi-335717.html (дата звернення 24.02.2025)

25. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: монографія . Х.: Факт, 2005. 360 с.

26. Рекомендації щодо формування математичної компетентності учнів на рівні початкової освіти. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2022/09/Metodychni_matematychna.pdf (дата звернення 23.02.2025)

27. Розбір домашнього завдання. Обчислення логарифмів. URL: https://www.youtube.com/watch?v=36Lhw4BcmN4&t=4s (дата звернення 23.02.2025)

28. Самойленко Л. Методика навчання логарифмічних рівнянь та нерівностей. Кропивницький. Вип. 4. 2019. 14 с.

29. Сафонова І.Я. Формування математичної компетентності у старшокласників. *Актуальні проблеми державного управління, педагогіки та психології.* 2013. Вип. 2. С. 397-402.

30. Соколенко Л.О. Методика навчання курсу «Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія)» (рівень стандарту). Методичні рекомендації до навчання змістових модулів №6-9 навчальної дисципліни «Методика навчання математики» для студентів спеціальності 014 Середня освіта (математика). Чернігів: НУЧК імені Т.Г. Шевченка, 2020. 132 с.

31. Соколенко Л.О., Швець В.О. Прикладні задачі, призначені для вивчення логарифмічної функції в курсі алгебри і початків аналізу. 2014. 11 с.

32. Старша школа зарубіжжя: організація та зміст освіти / за ред. О.І. Локшиної. К.: СПД Богданова А.М., 2006.

33. Шпак С.М. Формування математичних компетентностей в учнів за новими програмами. URL: https://naurok.com.ua/formuvannya-matematichnih-kompetentnostey-v-uchniv-za-novimi-programami-26147.html (дата звернення 23.02.2025)

ДОДАТКИ

Додаток А

Вивчення логарифмів для у 11-му класі стандартного та профільного рівня

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 11 клас
(54 год. І семестр — 16 год, 1 год на тиждень,
ІІ семестр — 38 год, 2 год на тиждень, Резерв – 18 годин)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	**Зміст навчального матеріалу**
Тема 1. ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ 16 годин	
Учень/учениця: **розпізнає і будує** графіки показникової і логарифмічної функцій; **ілюструє** властивості показникової і логарифмічної функцій за допомогою графіків; **застосовує** показникову та логарифмічну функції до опису реальних процесів; **розв'язує** найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.	Властивості та графіки показникової функції. Логарифми та їх властивості. Властивості та графік логарифмічної функції. Найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

Рис. 1.1. Вивчення логарифмів для у 11-му класі стандартного рівня

Алгебра і початки аналізу 11 клас
(210 год, 6 год на тиждень, Резерв – 80 годин)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	**Зміст навчального матеріалу**
Тема 1. ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ 40 годин	
Учень (учениця): **формулює** означення показникової і логарифмічної функцій та їх властивості; **формулює** означення логарифма та властивості логарифмів; **будує** графіки показникових і логарифмічних функцій; **перетворює** вирази, які містять логарифми; **знаходить** похідні показникових, логарифмічних, степеневих функцій і **застосовує** їх до дослідження цих класів функцій; **розв'язує** показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами **застосовує** показникову та логарифмічну функції до розв'язування прикладних задачах.	Степінь із дійсним показником. Показникова функція. Логарифми та їх властивості. Логарифмічна функція. Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами. Похідні показникової та логарифмічної функцій.

Рис. 1.2. Вивчення логарифмів для у 11-му класі профільного рівня

Додаток Б

Інтерактивні ресурси для вивчення логарифмів та їх графіків

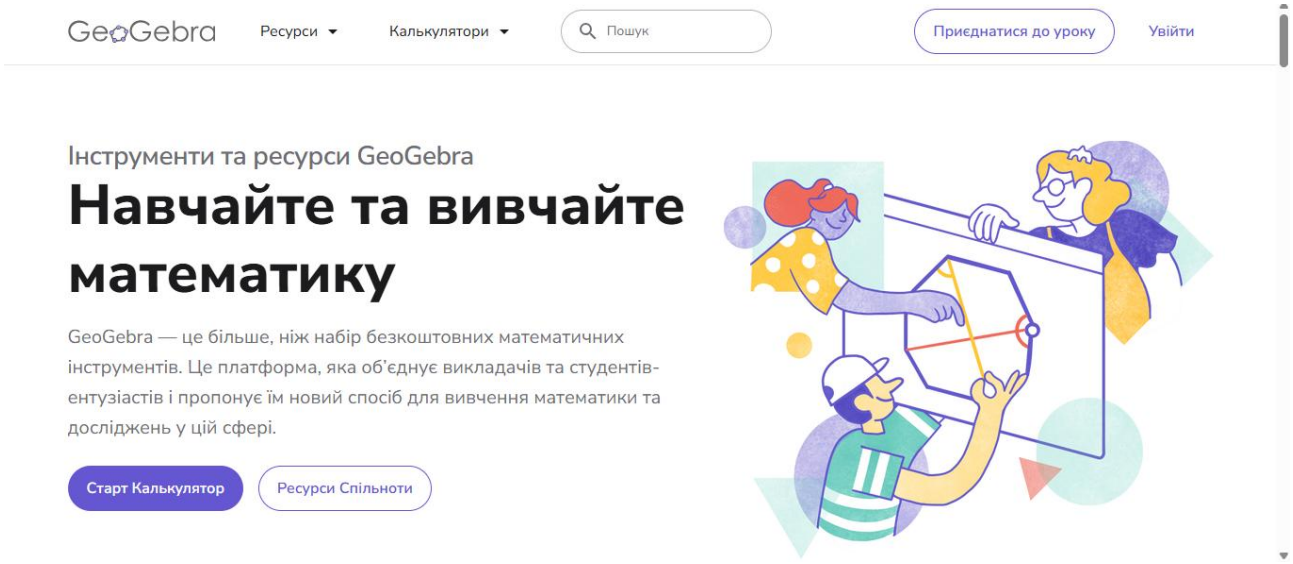


Рис. 1.3. Сайт для розв'зання логарифмічних функцій та їх графіків GeoGebra

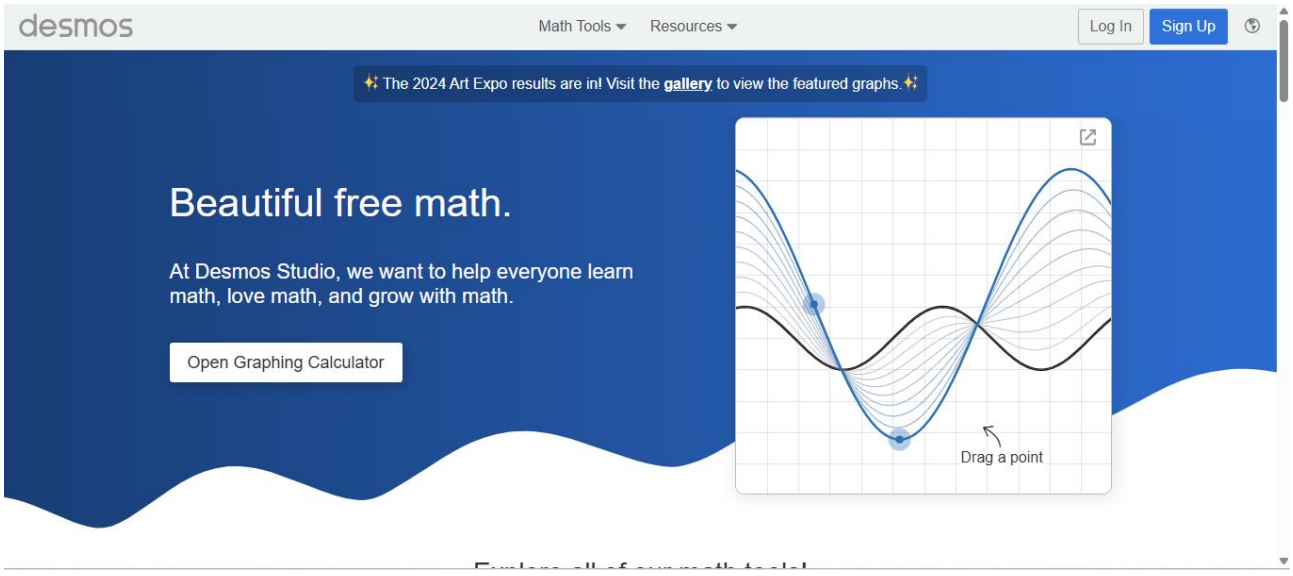


Рис. 1.4. Сайт для розв'зання логарифмічних функцій та їх графіків Demos

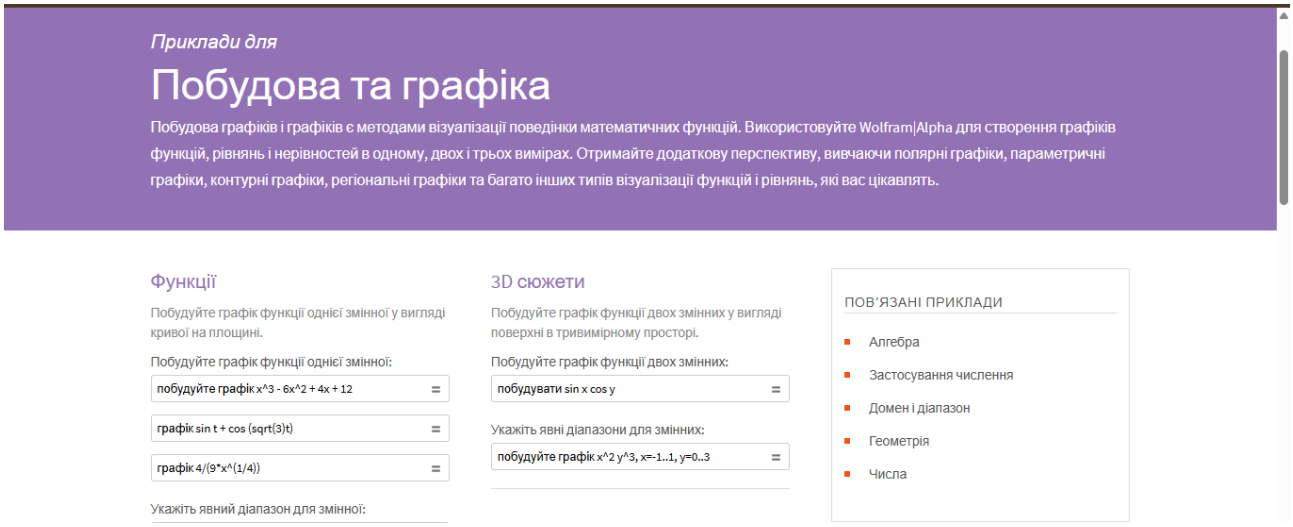


Рис. 1.5. Сайт для розв’зання логарифмічних функцій та їх графіків Wolfram Alpha

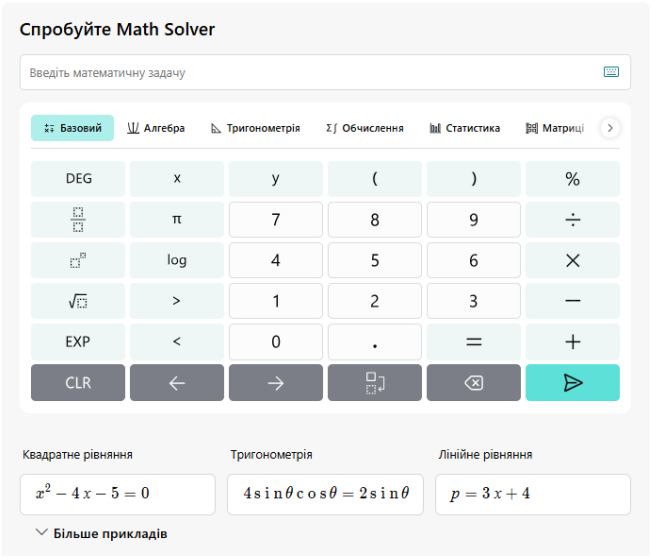


Рис. 1.6. Сайт для розв’зання логарифмічних функцій та їх графіків Microsoft Mathematics

Додаток В

Контрольний тест на тему «Логарифми, їх властивості та функції»

1. Яка функція є експоненціальною?
   a) $y = x^2$
   b) $y = 2^x$
   c) $y = \log_2 x$
   d) $y = x$
2. Який вираз є логарифмом?
   a) $y = a^x$
   b) $y = \log_a x$
   c) $y = x^a$
   d) $y = \ln x$
3. Як виглядає графік функції $y = 2^x$?
   a) Лінійний
   b) Параболічний
   c) Зростаючий
   d) Спадний
4. Що таке логарифм?
   a) Операція множення
   b) Операція ділення
   c) Зворотна операція до піднесення до степеня
   d) Зворотна операція до квадратного кореня
5. Що таке функція $y = \log_a x$?
   a) Це функція, яка зростає для всіх a
   b) Це функція, яка спадає для всіх a
   c) Це функція, яка є зворотною до функції $y = a^x$
   d) Це функція, яка постійна для всіх значень x
6. Як виглядає графік функції $y = \log_2 x$?
   a) Лінійний зростаючий графік
   b) Графік, який перетинає вісь x в точці $x = 1$
   c) Параболічний графік
   d) Спадний графік, що ніколи не досягає осі x
7. Як виглядає графік функції $y = 3^x$?
   a) Функція має вигляд прямої
   b) Функція зростає, наближаючись до осі x знизу
   c) Функція зростає і перетинає вісь y в точці $y = 1$
   d) Функція спадає

8. Яка з наступних властивостей є правильною для логарифмів?
   a) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
   b) $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$
   c) $\log_a x = \log_x a$
   d) $\log_a x = a^x$

9. Що таке перетворення логарифмів у показники?
   a) $\log_a x = y \Rightarrow a^y = x$
   b) $\log_a x = y \Rightarrow x = a^y$
   c) $\log_a x = y \Rightarrow x = \log_a y$
   d) $\log_a x = y \Rightarrow y = x^a$

10. Яка з рівнянь є розв'язком для $\log_3 x = 2$?
    a) $x = 9$
    b) $x = 3^2$
    c) $x = 6$
    d) $x = 2$

11. Яке значення $\log_2 32$?
    a) 4
    b) 5
    c) 3
    d) 6

12. Яке з наступних рівнянь є рівнянням для перетворення показників у логарифми?
    a) $2^x = 16 \Rightarrow \log_2 16 = x$
    b) $x^2 = 16 \Rightarrow \log_x 16 = 2$
    c) $3^x = 9 \Rightarrow \log_3 9 = x$
    d) Все вірно

Додаток Г

МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ ПРИ ВИВЧЕННІ ЛОГАРИФМІВ ЗГІДНО ПРОГРАМИ СТАНДАРТНОГО РІВНЯ

Метою розробки є формування математичної компетенції в учнів через поетапне освоєння теоретичних знань про логарифмічні та показникові функції, а також формування умінь та навичок для розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять логарифмічні вирази.

Завдання методики включають:

1. Ознайомити учнів з основними поняттями та властивостями логарифмів.
2. Навчити учнів побудови графіків логарифмічних функцій.
3. Сформувати уміння розв'язувати логарифмічні рівняння та нерівності та працювати з допоміжними програмами.
4. Розвивати критичне мислення через розв'язування прикладних задач.
5. Інтегрувати міжпредметні зв'язки для використання логарифмів у реальних ситуаціях.

Об'єктом дослідження є процес формування математичної компетентності учнів старших класів при вивченні логарифмів, а також вплив різних методичних підходів на цей процес.

Предметом дослідження є методика навчання логарифмів.

Розглянемо структури уроків і етапи навчання логарифмів згідно з чинної програми для старшої школи, а саме такі аспекти, як тема, мета, завдання, використані методи та запропоноване домашнє завдання.

Урок 1. Вступ до показникових функцій та їх властивостей.

Мета: ознайомити учнів з поняттям показникової функції та її властивостями.

Завдання:

1. Ознайомити учнів з основами показникової функції $y=a^x$, де $a>0$, $a\neq 1$.
2. Дослідити властивості показникових функцій: монотонність, асимптоти, поведінка на межах, розглянути функцію при $a > 0$ та $0 < a < 1$.
3. Ознайомити з основами GeoGebra або Desmos для побудови графіків показникових функцій.

Методи: традиційний метод (лекція, запис на дошці властивостей показникових функцій), інтерактивний (використання GeoGebra або Desmos для побудови графіків функцій типу $y = a^x$, $a = 2$, $a = \frac{1}{2}$, $a = 3$), метод пошукової

діяльності (створення таблиць значень для різних значень x та побудова графіків функцій у GeoGebra).

Домашнє завдання: побудувати графіки для функцій y = 2^x, y = 5^x, y = $\frac{1^x}{3}$ у GeoGebra або Desmos, дослідити, як зміни значення a впливають на форму графіка.

Урок 2. Логарифми та їх властивості.

Мета : ознайомити учнів з логарифмами та їх основними властивостями, навчити їх використовувати для спрощення виразів.

Завдання :

1. Ознайомлення з поняттями логарифмів та їх відношення до показникової функції (рис. 2.7).

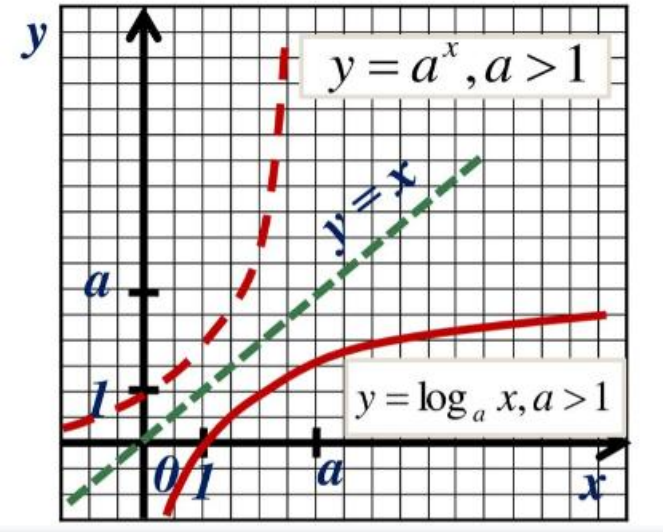


Рис. 2.7. Графік функції, де y = $\log_a$x асиметричний графіку показникової функції y=a^x, відносно прямої y = x.

2. Розгляд властей:

Логарифм одиниці дорівнює нулю:

$\log_a 1 = 0$

(Логарифм числа 1 для будь-якої основи завжди дорівнює нулю (a > 0, a ≠ 1). Тому, що будь-яка основа, піднята до нульового ступеня, дає 1)

$\log_a a = 1$

(Логарифм числа з основою, рівною самому числу, завжди дорівнює 1)

До прикладу:

$\log_1 1 = 0$ $\log_2 2 = 1$

$\log_{57} 1 = 0$ $\log_{14} 14 = 1$

$\log_{274} 1 = 0$ $\log_1 010 = 1$

Пояснення розв’язання рівняння:

$\log_3(x^2)=4$

Щоб розв'язати це рівняння, спочатку потрібно згадати, що логарифм є зворотним до показникової функції. Перетворимо рівень у вигляд показникового: $x^2=3^4$, тому $3^4 = 81$, то $x^2 = 81$. Тепер, щоб знайти x, потрібно взяти квадратний корінь з обох частин рівняння: $x = \pm\sqrt{81} = \pm 9$.

Методи **:** традиційний метод, інтерактивний (Kahoot!), практичний (розв'язування вправ на застосування властивостей логарифмів). Домашнє завдання : розв'язати рівняння та пройти тест у Kahoot!

$\log_3 3 = 0$ $\log_2(x^4) = 8$

$\log_5 1 = 0$ $\log_4(x^2) = 3$

$\log_5 7 = 0$ $\log_5(x^3)=3$

Урок 3. Логарифм добутку та частки

Мета: ознайомити учнів з властивостями логарифмів добутку та частки. Навчити застосовувати ці властивості для спрощення виразів та розв'язування рівнянь.

Завдання:

1. Ознайомитися з властивістю логарифмів добутку:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

(Логарифм добутку двох чисел дорівнює сумі логарифмів цих чисел)

2. Ознайомитися з властивістю логарифмів частки:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

(Логарифм частки двох чисел дорівнює різниці логарифмів чисельника і знаменника)

Пояснення розв’язання рівняння:

a — це основа логарифма; x — число, з якого обчислюється логарифм.

Логарифм добутку. Логарифм добутку двох чисел дорівнює сумі логарифмів цих чисел. Це можна записати так:

$$\log_a (b*c) = \log_a b + \log_a c$$

Це правило дає можливість спростити вирази з добутками. Наприклад, якщо ми маємо логарифм добутку двох чисел, ми можемо розділити його на два логарифми і обчислити кожен окремо.

Приклад 1: $\log_3 45 = \log_3(9*5) = \log_3 9 + \log_3 5 = 2 + \log_3 5$, (оскільки $9 = 3^2$, то $\log_3 9 = 2$).

Приклад 2: $\log_6 36 + \log_6 9 = \log_3(36*9) = \log_6 324 = 2$, (оскільки $6^2 = 36$ і $6^2 = 216$, перевірка показує, що результат дорівнює 2).

Логарифм частки. Логарифм частки двох чисел дорівнює різниці логарифмів чисельника та знаменника:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Це правило дає можливість спростити вирази з частками. Якщо маємо логарифм від поділу, можна розділити його на два логарифми і зробити віднімання.

Приклад 1: $\log_3(\frac{5}{3}) = \log_3 5 - \log_5 3 = \log_3 5 - 1$, оскільки $\log_5 3 = 1$.

Приклад 2: $\log_2 16 - \log_2 4 = \log_2(\frac{16}{4}) = \log_2 4 = 2$, оскільки 16:4=4.

Методи: традиційний метод (викладення теоретичних основ властивостей логарифмів добутку та частки на дошці, пояснення прикладів та демонстрація процесу перетворення логарифмічних виразів), інтерактивний метод (використання графічних калькуляторів або програм (GeoGebra, Desmos) для побудови графіків логарифмічних функцій, перегляд відео на YouTube [27]), практичний (учні виконують вправи на застосування властивостей логарифмів (як добутку, так і частки) для спрощення виразів та розв'язування рівнянь, самостійне розв'язування вправ на основі розглянутих властивостей), робота в парах (учні працюють в парах, щоб обговорити та розв'язати кілька прикладів, допомагаючи один одному зрозуміти процес виконання задач).

Домашнє завдання:

1. Розв'язати рівняння, використовуючи властивості добутку та частки.

$\log_2 8x = 4$ $\log_5 x + \log_5 5 = 3$

$\log_3 9x = 2 + \log_3 x$ $\log_7 x + \log_7 7 = 1$

2. Перевести вирази з логарифмами добутку та частки в спрощену форму: $\log_4 12 + \log_4 3$; $\log_2 16 + \log_2 4$; $\log_3 9 + \log_3 27$.

Самостійна роботи (2 варіанти)

Тема: Застосування властивостей логарифмів та побудова графіків логарифмічних функцій після вивчення

Варіант 1

1. Тестове завдання. Оберіть правильну відповідь.

1.1. Яке значення має вираз $\log_2 1$?

a) 1 b) 0 c) 2 d) -1

1.2. Яке значення має вира $\log_3 3$?

a) 1 b) 0 c) 3 d) 2

1.3. Перетворіть вираз $\log_2 8$ у показникову форму.

a) $2^3 = 8$ b) $8^2 = 2$ c) $2^8 = 16$ d) $8^2 = 64$

1.4. Спростіть $\log_5 25 + \log_5 5$.

a) $\log_5 5$ b) 3 c) 1 d) 2

1.5. Розв'яжіть рівняння $\log_2 x = 5$.

a) x=32 b) x=25 c) x=5 d) x=10

2. Розв'яжіть рівняння.

2.1. $\log_3 (x^2) = 4$

2.2. $\log_2 x + \log_2 (x-3) = 2$

2.3. $\log_5(x-1) + \log_5(x+1) = 2$

3. Побудуйте графік функції: $y = \log_4(x+2)$

Варіант 1

1. Тестове завдання. Оберіть правильну відповідь.

1.1. Яке значення має вираз $\log_5 1$?

a) 1 b) 0 c) 5 d) -1

1.2. Яке значення має вира $\log_{17} 17$?

a) 1 b) 0 c) 17 d) 2

1.3. Перетворіть вираз $\log_2 16$ у показникову форму.

a)$16^2 = 2$ b) $2^4 = 16$ c) $2^8 = 16$ d) $16^2 = 64$

1.4. Спростіть $\log_3 81 + \log_3 9$.

a) $\log_3 9$ b) 2 c) $\log_3 72$ d) $\log_3 3$

1.5. Розв'яжіть рівняння $\log_2 x = 3$.

a) x=8 b) x=6 c) x=2 d) x=5

2. Розв’яжіть рівняння.

2.1. $\log_4 (x^2) = 4$

2.2. $\log_2 x - \log_2(x-1) = 1$

2.3. $\log_3 x + \log_3 3 = 2$

Побудуйте графік функції: $y = \log_2 (x+1)$

Урок 4. Властивість логарифму ступеня.

Мета: ознайомити учнів з властивістю логарифму ступеня, навчити застосовувати її для спрощення виразів і розв’язування рівнянь.

Завдання: вивчити властивість логарифму ступеня:

n — показник ступеня.

$$\log_a x^n = n * \log_a x$$

(Логарифм ступеня числа можна перетворити в добуток показника ступеня та логарифма основи. Ця властивість дозволяє винести показник ступеня з-під знака логарифма як множник).

Пояснення розв’язання рівняння:

Якщо ми маємо вираз $\log_a x^n$, ми можемо перетворити його в $n * \log_a x$, де a — це основа логарифма; x — число, з якого обчислюється логарифм; n — показник ступеня

Приклад 1: $\log_2 (x^3) = 3 * \log_2 x$.

Це правило дозволяє зручно працювати з виразами, де є ступені. Показник ступеня просто виноситься перед логарифм.

Приклад 2: $\log_3 (y^4) = 4 * \log_3 y$

Якщо ми маємо вираз $\log_3 (y^4)$, то ми можемо просто винести 4 перед логарифм, що спрощує розв'язування рівнянь або виразів.

Традиційний метод (пояснення теоретичних основ через записи на дошці), інтерактивний (використання графічних програм для побудови графіків), практичний (розв'язування вправ для застосування властивості на практиці), індивідуальна робота (самостійне виконання вправ з подальшим обговоренням).

Домашнє завдання:

1. Виконати вправи на застосування властивості логарифму ступеня: $\log_3 (x^4) = 4 * \log_3 x$; $\log_5 (x^{25}) = 25 * \log_5 x$; $\log_{17} (x^6) = 6 * \log_{17} x$.
2. Спрощення виразів: $\log_{12} (x^5) + \log_{12} (y^5)$; $\log_{41} (x^2) + \log_{41} (y^2)$.
3. Розв'язати рівняння з використанням властивості логарифму ступеня: $\log_2 (x^4) = 8$; $\log_5 (y^3) = 6$.

Урок 5. Розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь.

Мета: навчити учнів розв'язувати рівняння, що містять показникові та логарифмічні вирази.

Завдання:

1. Ознайомити учнів з методами розв'язування рівнянь, які включають показникові та логарифмічні функції.
2. Навчити перетворювати логарифмічні рівняння в показникові та навпаки для спрощення обчислень.
3. Розв'язати рівняння різних рівнів складності.

Приклади рівнянь:

$\log_2 x = 3 \rightarrow x = 2^3 = 8$ (простий приклад логарифмічного рівняння).

$\log_2 (x^3) = 4 \rightarrow x^2 = 3^4 \rightarrow x = \pm 81$ (приклад зі степенем).

$2^x = 16 \rightarrow x = \log_2 16 = 4$ (складніший приклад (показникове рівняння)).

$\log_5 x + \log_5 (x-4) = 1 \rightarrow \log_5 (x(x-4)) = 1 \rightarrow x (x-4) = 5$ (рівняння з використанням властивостей логарифмів).

$3^{2x} = 81 \rightarrow \log_3(3^{2x}) = \log_3 81 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$ (рівняння, яке потребує логарифмування).

$\log_2 x - \log_2 (x-2) = 1 \rightarrow \log_2 (\frac{x}{x-2}) = 1 \rightarrow \frac{x}{x-2} = 2 \rightarrow x = 4$ (рівняння з двома різними логарифмами).

$5^{2x} = 25 \rightarrow 5^{2x} = 5^2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$ (складне рівняння з двома показникам).

$\log_3 x = 2 \rightarrow x = 3^2 = 9$ (рівняння, що містить логарифм і показник).

$\log_2 (x^3) = 9 \rightarrow 3\log_2 x = 9 \rightarrow \log_2 x = 3 \rightarrow x = 8$ (рівняння зі степенем та логарифмом).

$\log_3 x + \log_3 (x-2) = 2 \rightarrow \log_3 (x(x-2)) = 2 \rightarrow x(x-2) = 9$ (рівняння з дробовими виразами та логарифмами).

Методи: традиційний (пояснення через записи на дошці, покрокове розв’язування рівнянь, демонстрація перетворень логарифмічних і показникових

рівнянь), інтерактивний (використання програм GeoGebra або Desmos для графічного відображення рівнянь та аналізу рішень), метод практичної діяльності (самостійне розв’язування рівнянь у класі, практичні завдання з обговоренням рішень).

Домашнє завдання: розв’язати 10 рівнянь, а саме:

$\log_2 x = 4$ $3^x = 81$

$\log_4 (x^2) = 2$ $\log_3 x + \log_3 (x + 1) = 2$

$2^{3x} = 32$ $\log_4 (x-3) = 1$

$\log_2 (x+1) - \log_2 x = 1$ $\log_7 (x^3) = 3$

$\log_4 (x^4) = 3$ $\log_5 x + \log_5 (x-1) = 1$

Урок 6. Логарифмічні нерівності.

Мета: ознайомити учнів з логарифмічними нерівностями та навчити їх розв'язувати.

Завдання:

1. Ознайомити учнів з основними типами логарифмічних нерівностей.

2. Навчити розв’язувати нерівності з логарифмами, використовуючи обмеження області визначення (ОДЗ).

Розв'язування логарифмічних нерівностей ґрунтується на властивості монотонності логарифмічної функції, що залежить від основи логарифма, та на обмеженні області визначення (ОДЗ).

Монотонність логарифмічної функції. Якщо основа логарифма $a > 1$, то логарифмічна функція зростає, тобто:

$$\log_a \int(x) > \log_a g(x) \rightarrow \int(x) > g(x)$$

Якщо основа логарифма $0 < a < 1$, то логарифмічна функція спадає, тобто:

$$\log_a \int(x) > \log_a g(x) \rightarrow \int(x) < g(x)$$

Область визначення (ОДЗ). Логарифм визначений тільки для додатних аргументів, тому:

$$\int(x) > 0 \text{ і } g(x) > 0$$

Якщо основа логарифма не рівна 1 та більше нуля. Тому перед розв'язуванням потрібно знайти область визначення кожної частини нерівності.

Приклад 1: $\log_2 (3-x) < -1$ (рис. 2.8) [17]

$log_2(3-x) < -1$

$log_2(3-x) < log_2 2^{-1}$

$log_2(3-x) < log_2 0{,}5$

$3-x < 0{,}5$

$-x < 0{,}5-3$

$-x < -2{,}5$

$x > 2{,}5$

$x \in (2{,}5;\ +\infty)$

ОДЗ:

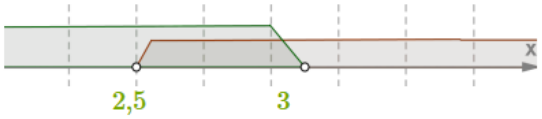
$3-x > 0$

$-x > -3$

$x < 3$

$x \in (-\infty;\ 3)$

$$\begin{cases} x \in (2{,}5;\ +\infty) \\ x \in (-\infty;\ 3) \end{cases}$$



Відповідь: $x \in (2{,}5;\ 3)$

Рис. 2.8. Розв’язання логарифмічної функції $\log_2$ (3-x) < -1

Отже, спочатку ми шукаємо область визначення (ОДЗ). Логарифм має бути визначений, тому 3 - x > 0, тобто x < 3.

Далі розв'язуємо нерівність. Оскільки основа логарифма a = 2 > 1, функція зростає, тому знак нерівності не змінюється.

Останнім етапом перевіряємо ОДЗ і остаточний розв'язок. Оскільки x < 3, то отримана множина розв'язків x > 2.5 і x < 3, що дає нам відповідь: x ∈ (2.5; 3).

Приклад 2: $\log_{0.5}$ (x-2) ≥ $\log_{0.5}$ (2x-12) (рис. 2.9)

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ 2x-12 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ 2x > 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 6 \end{cases} \Rightarrow x > 6$$

$x \in (6;\ +\infty)$

$log_{0,5}(x-2) \geq log_{0,5}(2x-12)$

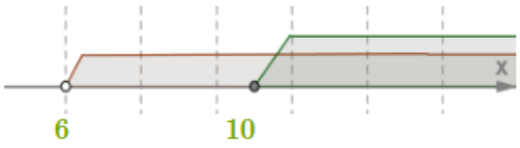
$x-2x \leq x-12$

$x-2x \leq -12+2$

$-x \leq -10$

$x \geq 10$

$$\begin{cases} x \in [10;\ +\infty) \\ x \in (6;\ +\infty) \end{cases}$$



Відповідь: $x \in [10;\ +\infty)$

Рис. 2.9. Розв’язання логарифмічної функції $\log_{0.5}(x-2) \geq \log_{0.5}(2x-12)$

Першочергово шукаємо ОДЗ, отримавши x > 6, розв'язуємо нерівність. Оскільки основа логарифма a = 0.5 < 1, логарифмічна функція спадає, тому знак нерівності змінюється. Далі перевіряємо ОДЗ і остаточний розв'язок. Оскільки ОДЗ x > 6, то остаточний розв'язок x ≥ 10. Таким чином, x ∈ [10;+∞).

Якщо основа a >1, то логарифмічна функція зростає, і знак нерівності не змінюється. Якщо основа 0 < a < 1, то логарифмічна функція спадає, і знак нерівності змінюється. При ОДЗ логарифм визначений тільки для додатних аргументів, тому кожен вираз всередині логарифма повинен бути більший за нуль.

Таким чином, перетворення логарифмічної нерівності в алгебраїчну форму, врахування монотонності функції та перевірка області визначення дають можливість отримати правильний розв'язок.

Методи: традиційний (пояснення теоретичних основ через записи на дошці, демонстрація вирішення нерівностей за допомогою властивостей логарифмів), інтерактивний (використання графічних програм для візуалізації змін значень при вирішенні нерівностей, на прикладах різних основ логарифмів), метод практичної діяльності (самостійне розв’язування нерівностей, з подальшим обговоренням рішень у класі).

Домашнє завдання: розв'язати нерівність:

$\log_3(x-1) > 2$ $\log_4(2x-1) \leq \log_4(x+3)$

$\log_{0.7}(x-2) \geq 1$ $\log_5(3x+1) < \log_5(2x+4)$

Урок 7. Застосування логарифмів у природі та різних галузях.

Мета: ознайомити учнів з практичним застосуванням логарифмів.

Завдання:

1. Ознайомити учнів з використанням логарифмів у природі, техніці та науці.

2. Застосування логарифмів у екології та біології.

Логарифми у природі. Логарифмічні функції використовуються для моделювання росту популяцій організмів, де ріст може бути експоненціальним або логарифмічним, описуючи зміни чисельності популяцій в залежності від часу. Логарифми використовуються для обчислення часу напіврозпаду радіоактивних матеріалів. Формули для розпаду містять логарифмічні вирази.

Логарифми в техніці. Логарифмічна шкала застосовується для вимірювання рівня звуку в децибелах, оскільки людське вухо чутливе до змін звуку за логарифмічною шкалою. Логарифми застосовуються для вимірювання освітленості, коли світло розповсюджується за інверсією квадрату відстані від джерела.

Логарифми в економіці. Логарифми використовуються для обчислення складних відсотків, коли капітал зростає за експоненціальною чи логарифмічною шкалою. Логарифмічні функції допомагають прогнозувати темпи інфляції та зміну цін на товари.

Логарифми в біології. Логарифми допомагають описати швидкість поширення вірусів або бактеріальних інфекцій у популяціях.

Методи: традиційний (пояснення теорії та застосувань логарифмів у різних галузях), інтерактивний (використання наочних прикладів і програм для демонстрації застосування логарифмів у реальних задачах, а саме Wolfram Alpha чи Microsoft Mathematics).

Домашнє завдання: підготувати коротку презентацію про використання логарифмів в різних галузях (обрати одну за допомогою Canva та PoverPoint.

Самостійна роботи (2 варіанти)

Тема: Застосування властивостей логарифмів та побудова графіків логарифмічних функцій після вивчення

Варіант 1

1. Тестове завдання. Оберіть правильну відповідь.

1.1. Яка з властивостей логарифмів дозволяє перетворювати логарифм добутку в суму логарифмів?

a) Логарифм добутку b) Логарифм частки c) Логарифм степеня d) Логарифм одиниці

1.2. Який вираз є спрощенням $\log_2(x^4)$?

a) $4 * \log_2 x$ b) $\log_2 4x$ c) $\log_4 x$ d) $4 * \log_4 x$

1.3. Який вираз для логарифма можна спростити, застосувавши властивість логарифму добутку?

a) $\log_2 x + \log_2(x+1)$ b) $\log_2 x - \log_2(x+1)$ c) $\log_2 x - \log_2(x-1)$ d) $\log_2 (x^2) = 2 * \log_2 x$

2. Розв'яжіть рівняння та нерівності.

2.1. $\log_2 x^4 = 8$

2.2. $\log_5 (x^3)$

2.3. $\log_4 (2x-1) \leq \log_4 (x+3)$

3. Побудуйте графіки функцій у програмі GeoGebra або Desmos: $y = \log_2 x$. Дослідіть поведінку для $x > 0$ та поясність письмово, чому вона саме така.

Варіант 2

1. Тестове завдання. Оберіть правильну відповідь.

1.1. Яке значення має вираз $\log_5 125$?

a) 1 b) 3 c) 5 d) 2

1.2. Для якого значення x логарифм $\log_2 x$ визначений?

a) $x > 0$ b) $x \geq 0$ c) $x < 0$ d) $x = 0$

1.3. Яка з цих нерівностей правильна для основи логарифма 0<a<1?

a) $\log_a x > \log_a y \rightarrow x < y$ b) $\log_a x < \log_a y \rightarrow x < y$ c) $\log_a x = \log_a y \rightarrow x = y$ d) $\log_a x > \log_a y \rightarrow x > y$

2. Розв'яжіть рівняння та нерівності.

2.1. $\log_3(x^2) = 4$

2.2. $\log_2 (x+1) = 3$

2.3. $\log_5 (2x -3) > \log_5 (x+4)$

3. Побудуйте графіки функцій у програмі GeoGebra або Desmos: $y = \log_5 (x-1)$. Дослідіть поведінку для $x > 0$ та поясність письмово, чому вона саме така.

У рамках розробки завдань для вивчення логарифмів було також створено різноманітні **завдання різного рівня складності** (простий, середній та складний). Завдання охоплювали базові рівняння та нерівності, а також більш складні вирази з логарифмічними функціями, включаючи задачі на застосування логарифмів у природничих науках. Такий підхід дозволяє учням поступово переходити від простих до складних концепцій, закріплюючи матеріал на кожному етапі навчання.

Простий рівень (8 завдань)

Завдання: розв’язати рівняння та нерівності

$\log_{277} 1 = 0$ $\log_3(x^2) = 4$

$\log_{13} 13 = 0$ $\log_4 x < 3$

$\log_{14} 14 = 1$ $\log_{10} 100$

$\log_3 81$ $\log_2(x+1) \geq 2$

Середній рівень (10 завдань)

Завдання: розв’язати рівняння та нерівності.

$\log_5 25 + \log_5 5$ $\log_6 x - \log_6 (x-3) = 2$

$\log_{10} 50 + \log_{10} 5$ $\log_{10}(2x) - \log_{10} x = 1$

$\log_4 (x^2) = 4$ $\log_4 (x + 3) + \log_4 (x - 1) = 2$

$\log_4 (x +2) \geq 1$ $\log_5 (x-1) + \log_5 (x+1) = 2$

Завдання: побудувати графіки

$y = \log_3 x$ $\log_2(3x-4) = 2$

Складний рівень (10 завдань)

Завдання: розв’язати рівняння та нерівності.

$\log_6 x + \log_6 x(x-3) + 3$ $\log_4 (x+1) - \log_4 (x-2) = 2$

$\log_5(x+1) - \log_5(x-1) = 2$ $\log_5 (x+2) + \log_5 (x-2) = 4$

$\log_4(x^2) - \log_4 (3x-2) = 1$ $\log_3 (x+2) + \log_3 (x-2) = 3$

$\log_6 x * \log_6 (x-1) = 2$ $\log_5 (2x-1) \geq \log_5 (x+4)$

Завдання: побудувати графіки

$\log_3 (x^2 - 4) > \log_3 (x+2)$ $\log_2(x-1) + \log_2 (x+3) \leq 3$

Додаток Д

СЕРТИФІКАТ УЧАСНИКА XI МІЖНАРОДНА НАУКОВО-МЕТОДИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ « ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ ПМО-2025».



ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ БОГДАНА ХМЕЛЬНИЦЬКОГО

NOSCE SAPIENTIAM

СЕРТИФІКАТ

Серія ПМО № 02125622/081-25

учасника
XI Міжнародної науково-методичної конференції

«ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ»
ПМО – 2025
(10 – 11 квітня 2025 року)

учасник _____
Лешко Вікторія Василівна

Кількість годин: 10 годин / 0,33 кредиту ЄКТС

Директор
ННІ інформаційних
та освітніх технологій,
кандидат пед. наук,
доцент А. В. Ткаченко

Сертифікати від Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького (код КВЕД 85.59) відповідають вимогам п. 13 Порядку підвищення кваліфікації педагогічних і науково-педагогічних працівників, затвердженого КМУ № 800 від 21.08.2019 р.

Додаток Е

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

Логарифмічне диференціювання складних функцій

Мета роботи:

1) засвоїти методи логарифмічного диференціювання;

2) навчитися знаходити похідні функцій виду $y = f(x)^{g(x)}$

3) застосовувати логарифмічне диференціювання для спрощення обчислень;

4) розвинути навички роботи з показниково-степеневими функціями

Теоретична частина

1.1. Основи логарифмічного диференціювання

Логарифмічне диференціювання – це метод знаходження похідної функції шляхом попереднього логарифмування обох частин рівності.

Основна ідея методу: якщо задано функцію y = f(x), то:

1) логарифмуємо обидві частини: ln y = ln f(x)

2) диференціюємо за змінною x

3) виражаємо y' з отриманого рівняння

Формула:

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{1}{y} * \frac{dy}{dx}$$

Звідси:

$$\frac{dy}{dx} = y * \frac{d}{dx}(\ln f(x))$$

1.2. Випадки застосування логарифмічного диференціювання

Випадок 1: Показниково-степенева функція

$$y = f(x)^{g(x)}$$

Алгоритм:

1. ln y = g(x) *ln f(x)
2. $\frac{1}{y} * y' = g'(x) * \ln f(x) + g(x) * \frac{f\prime(x)}{f(x)}$
3. $y' = y\,(g'(x) * \ln f\,(x) + g(x) * \frac{f\prime(x)}{f(x)}$

Випадок 2: Добуток багатьох функцій

$$y = f_1(x)* f_2(x)*\ldots* f_n(x)$$

Алгоритм:

1. $\ln y = \ln f_1(x) + \ln f_2(x) + ... + \ln f_n(x)$
2. $\frac{1}{y} * y' = \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2'(x)} + \ldots + \frac{f_n'(x)}{f_n'(x)}$

Випадок 3: Складні частки

$$y = \frac{f_1(x) * f_2(x)}{f_3(x) * f_4(x)}$$

1.3. Логарифмічна похідна

Логарифмічною похідною функції f(x) називається похідна від логарифма цієї функції:

$$\frac{d}{dx}(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Властивості:

1) логарифмічна похідна добутку дорівнює сумі логарифмічних похідних

2) логарифмічна похідна частки дорівнює різниці логарифмічних похідних

3) логарифмічна похідна степеня: $(\ln f^n(x))' = n * \frac{f\prime(x)}{f(x)}$

Практична частина. Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайти похідні функцій методом логарифмічного диференціювання:

а) $y = x^{\sin x}$

б) $y = (\cos x)^x$

в) $y = (x^2 + 1)^{x3}$

г) $y = x^{x^2}$

д) $y = (e^x)^{\ln x}$

Завдання 2: Знайти похідні складних добутків і часток:

а) $y = \frac{x^2\sqrt{x+3}}{(x-1)^3}$

б) $y = \frac{(x+1)^2(x+2)^2}{(x+3)^2}$

в) $y = x * \sin x * e^x * \ln x$

г) $y = \frac{x^n * x^{ax}}{\sqrt{x^2+1}}$

д) $y = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-3)^4}}$

Завдання 3. Розв'язати задачі:

а) Знайти похідну $y = x^{x^2}$

б) Довести, що якщо $y = f(x)^{g(x)}$, то

$y' = y\,(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$

в) Знайти $\frac{dy}{dx}$, якщо $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

г) Дослідити функцію $y = x^{\frac{1}{x}}$ на екстремум

д) Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^{\ln x}$ в точці $x = e$

Завдання 4. Розв'язати прикладні задачі:

а) Знайти швидкість зміни функції $N(t) = t^{t^2}$ в момент часу t = 1

б) Дослідити на монотонність функцію $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$ при $x > 1, x \neq e$

в) Знайти точки перегину кривої $y = x^2$

г) Розв'язати рівняння: $(x^x)' = x^x\,(\ln x + 2)$

д) Довести нерівність: якщо $x > 0$, то $x^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{e}}$

Контрольні питання

1. У чому полягає метод логарифмічного диференціювання?
2. Які функції зручно диференціювати цим методом?
3. Що таке логарифмічна похідна?
4. Як знайти похідну добутку багатьох функцій?
5. У чому перевага логарифмічного диференціювання над звичайним?
6. Які обмеження має метод логарифмічного диференціювання?
7. Як знайти екстремуми функції $y = x^x$
8. Чому важливо перевіряти область визначення перед логарифмуванням?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2

Інтегрування з використанням логарифмічних функцій

Мета роботи:

1) засвоїти методи інтегрування, що включають логарифмічні функції;

2) навчитися розв'язувати інтеграли від раціональних функцій методом розкладу на прості дроби;

3) застосовувати інтеграційні формули для логарифмічних функцій;

4) розвинути навички обчислення визначених інтегралів з логарифмами.

Теоретична частина

2.1. Основні інтегральні формули для логарифмічних функцій

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} ln|ax+b| + c$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

$$\int x^n \ln x \, dx = x^{n+1} \left(\frac{\ln x}{n+z} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + c, n \neq -1$$

2.2. Інтегрування методом підстановки з логарифмами

Коли маємо інтеграл виду $\int f\ (\ln x) \frac{dx}{x}$, доцільно використовувати підстановку $t = \ln x$, тоді $dt = \frac{dx}{x}$.

Приклад:

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x}\ dx$$

підстановка: $t = \ln x, dt = \frac{dx}{x}$

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{(\ln x)^4}{4}$$

2.3. Інтегрування частинами з логарифмічними функціями

Для інтегралів виду $\int P(x) \ln x \, dx$, де P(x) - многочлен, використовуємо інтегрування частинами:

$$\int u \, dv = wv - \int v \, du$$

де зазвичай беремо $u = \ln x, \ dv = P(x)dx$

2.4. Розкладання на прості дроби та логарифмічні інтеграли

При інтегруванні раціональних функцій часто отримуємо логарифмічні вирази. Розглянемо метод розкладання на прості дроби.

Загальна схема:

1) якщо степінь чисельника ≥ степеня знаменника, виділяємо цілу частину;

2) розкладаємо знаменник на множники;

3) представляємо дріб у вигляді суми простих дробів;

4) знаходимо невідомі коефіцієнти

Типи простих дробів:

1) $\frac{A}{x-a} \to \int \frac{A}{x-a} dx = A \, ln|x-a| + c$

2) $\frac{A}{(x-a)^n} \to \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{1-n} * \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c, n > 1$

3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, якщо дискримінант < 0

Практична частина. Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{3x+2}{x} dx$

б) $\int \frac{dx}{2x-5}$

в) $\int \frac{x^2+z}{x} dx$

г) $\int \frac{(lnx)^2}{x} dx$

д) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

Завдання 2. Інтегрування частинами:

а) $\int x \ln x \, dx$

б) $\int x^3 \ln x \, dx$

в) $\int \ln(x+1) dx$

г) $\int \ln(x^2+1) dx$

д) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

Завдання 3. Розкладання на прості дроби:

а) $\int \frac{x+3}{x^2+x-2} dx$

б) $\int \frac{2x-1}{x^3-x} dx$

в) $\int \frac{x^2}{x^3-8} dx$

г) $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2(x+2)} dx$

д) $\int \frac{x^3+x+1}{x^2-1} dx$

Завдання 4. Визначені інтеграли:

а) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

б) $\int_0^1 x^2 \ln(1+x) dx$

в) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) \, dx$

д) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

Диференціальні рівняння з логарифмічними функціями

Мета роботи:

1) вивчити методи розв'язування диференціальних рівнянь з логарифмами;

2) застосувати логарифмічне диференціювання для спрощення рівнянь;

3) розв'язати прикладні задачі з використанням логарифмічних моделей;

4) дослідити стійкість та поведінку розв'язків

Теоретична частина

3.1. Класифікація диференціальних рівнянь з логарифмами

Тип 1. Рівняння з роздільними змінними

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Тип 2. Лінійні рівняння першого порядку

$$y' + p(x)y = g(x)$$

Тип 3. Рівняння Бернуллі

$$y' + p(x)y = g(x)y^n$$

Тип 4. Однорідні рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$$

3.2. Логарифмічні методи розв'язування

Метод логарифмічного диференціювання

Якщо маємо рівняння виду $y^n = f(x)$, то:

1) логарифмуємо обидві частини

2) диференціюємо

3) виражаємо y'

3.3. Рівняння з експоненційним та логарифмічним зростанням

Модель експоненційного зростання:

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

Розв'язок:$N(t) = N_0 e^{kt}$

Модель логістичного зростання:

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(1 - \frac{N}{L}\right)$$

де L - гранична чисельність популяції.

3.4. Лінійні рівняння з логарифмічними коефіцієнтами

Рівняння виду: $y' + p(x)y = q(x)$

Інтегруючий множник: $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

Практична частина. Завдання для самостійного виконання

Завдання 1

а) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x \ln x}$

б) $y' - \frac{y}{x} = x \ln x$

в) $yy' = xe^{x^2}$

г) $(1 + x)y' = y$

д) $y' = y \ln y$

Завдання 2

а) $xy' = y + x^2 \ln x$

б) $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x \ln x}$

в) $y'' + \frac{y'}{x} = \frac{\ln x}{x}$

г) $y' + y \tan x = \frac{\ln(\cos x)}{\cos x}$

д) $(x \ln x)y' + y = x$

Завдання 3

а) Розв'язати задачу Коші: $y' = \frac{x}{y \ln y}, y(1) = e$

б) Знайти особливі розв'язки: $y' = \frac{y^2 - 1}{x}$

в) Дослідити стійкість: $\frac{dN}{dt} = N(\ln N - 1)$

г) Модель з запізненням: $\frac{dy}{dt} = -ay(t) \ln(y(t - \tau))$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4

Логарифмічні ряди та їх збіжність

Мета роботи:

1) вивчити властивості та збіжність логарифмічних рядів;
2) освоїти методи дослідження збіжності рядів з логарифмами;
3) побудувати розклади функцій у степеневі ряди;
4) застосувати ряди для наближених обчислень

Теоретична частина

4.1. Основні поняття теорії рядів

Числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Частинні суми: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Збіжність: Ряд збігається, якщо $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$

4.2. Критерії збіжності для логарифмічних рядів

Інтегральний критерій Коші:

Якщо f(x)>0, f(x) спадає на [1,+∞), то ряд ∑f(n) та інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ одночасно збігаються або розбігаються.

4.3. Степеневі ряди з логарифмами

Степеневий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Радіус збіжності: $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Розклад логарифма:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots, |x| < 1$$

4.4. Комплексний логарифм та ряди

Головне значення комплексного логарифма:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z\,, -\pi < \arg z \leq \pi$$

Розклад для комплексних значень:

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n},|z|<1$$

4.5. Асимптотичні розклади

Формула Стірлінга:

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

Логарифм факторіала:

$$\ln(n!)\sim n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln(2\pi n)$$

Практична частина. Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Дослідити збіжність рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$

б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,(\ln n)^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\ln(n+1)}$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$

Завдання 2. Знайти радіус збіжності:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)x^n}{n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(\ln n)^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n\ln n}}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{(\ln n)^2}$

Завдання 3

а) Довести, що $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$ при $|x|<1$

б) Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2n^n}$

в) Обчислити $\ln 1.1$ з точністю до 10^{-6}

г) Дослідити умовну збіжність $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$

Контрольні питання для всіх лабораторних:

1) Коли застосовується інтегральний критерій збіжності?

2) Як знайти радіус збіжності степеневого ряду?

3) Що таке асимптотичний розклад?

4) Як пов'язані диференціальні рівняння та логарифми?

5) У чому особливість інтегрування раціональних функцій?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5

Логарифми у теорії ймовірностей та статистиці

Мета роботи:

1) засвоїти застосування логарифмів у теорії ймовірностей

2) вивчити логнормальний розподіл та його властивості

3) освоїти методи логарифмічної регресії та аналізу даних

4) застосувати логарифмічне масштабування в статистичних моделях

Теоретична частина

5.1. Логарифми в теорії ймовірностей

Логарифмічна функція правдоподібності:

$$L(\theta) f\ (x_i;\ \theta)$$

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\ \theta)$$

Логарифмування спрощує обчислення та забезпечує численну стійкість при роботі з малими ймовірностями.

Інформація Фішера:

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2}\right]$$

Ентропія Шеннона:

$$H(x) = -\sum_{i} p_i \ln p_i$$

5.2. Логнормальний розподіл

Випадкова величина X має логнормальний розподіл, якщо lnX має нормальний розподіл.

Функція щільності:

$$f(x)\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln x - \mu^2)}{2\sigma^2}\right), x > 0$$

Математичне сподівання:

$$E[X] = e^{\frac{2\mu+\sigma}{2}}$$

Дисперсія:

$$Var(X) = e^{2\mu+\sigma}(e^{\sigma^2} - 1)$$

Медіана:

$$Med(X) = \ e^{\mu}$$

Властивості:

1) Якщо $X \sim Lognormal(\mu, \sigma^2)$, то $\ln X(\mu, \sigma^2)$

2) Добуток логнормальних величин знову логнормальний

3) Використовується для моделювання позитивних величин з правосторонньою асиметрією

5.3. Логарифмічна регресія

Логарифмічна трансформація в регресійному аналізі:

Модель 1: $\ln Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$

збільшення X на 1 одиницю призводить до зміни Y на $100\beta_1\%$

Модель 2: $Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X + \varepsilon$

збільшення X на 1% призводить до зміни Y на $\beta_1/100$ одиниць

Модель 3: $\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X + \varepsilon$ (подвійна логарифмічна)

еластичність - збільшення X на 1% призводить до зміни Y на $\beta_1\%$

5.4. Логістична регресія

Логістична функція:

$$P(Y = 1|X|) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 X}}{1 + e^{\beta_0+\beta_1 X}} = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0+\beta_1 X)}}$$

Логіт-трансформація:

$$logit(P) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 X$$

Відношення шансів:

$$OR = e^{\beta_1}$$

5.5. Статистичні тести з логарифмами

Тест відношення правдоподібностей:

$$\Delta = -2\left[\ln L(\theta_0) - \ln L(\hat{\theta})\right]$$

За нульової гіпотези $\Delta \sim x_k^2$, де k - різниця в кількості параметрів.

Інформаційні критерії:

Критерій Акаіке (AIC):

$$AIC = -2 \ln L + 2k$$

Байєсівський інформаційний критерій (BIC):

$$BIC = -2 \ln L + k \ln n$$

Практична частина. Завдання для самостійного виконання

Завдання 1

а) Для логнормального розподілу з параметрами $\mu = 0, \sigma = 1$, знайдіть:

1) $P(X > e)$

2) $E[X]$ та $Var\ (X)$

3) 95-й процентиль

б) Обчислити ентропію для розподілу з щільностями: $p_1 = 0.5, p_2 = 0.3, p_3 = 0.2$

в) Побудувати функцію правдоподібності для нормального розподілу з невідомим середнім

г) Знайти оцінку максимальної правдоподібності для експоненціального розподілу

Завдання 2

а) Провести логарифмічну регресію для даних:

X	1	2	3	4	5
Y	2.7	7.4	20.1	54.6	148.8

б) Для логістичної регресії з $\beta_0 = -2, \beta_1 = 0.5$

1) Знайти ймовірність при X=3

2) Обчислити відношення шансів

в) Застосувати Box-Cox трансформацію до даних: {1,4,9,16,25,36,49}

г) Обчислити AIC та BIC для моделі з k = 3 параметрами та n=100 спостережень, якщо ln L= −150

Завдання 3

а) Генерувати 1000 значень з логнормального розподілу та оцінити параметри

б) Порівняти різні моделі регресії:

1) Лінійну: Y = a + bX

2) Логарифмічну: ln Y = a + bX

3) Степеневу: $Y = aX^b$

в) Розрахувати інформацію Фішера для пуассонівського розподілу

г) Дослідити вплив логарифмічної трансформації на нормальність розподілу

Завдання 4

а) Побудувати байєсівську модель з логнормальним апріорним розподілом

б) Застосувати логістичну регресію для класифікації двовимірних даних

в) Дослідити збіжність EM-алгоритму для суміші логнормальних розподілів

г) Оцінити параметри AR(1) процесу з логарифмічним шумом

д) Розробити тест на логнормальність розподілу

е) Дослідити асимптотичні властивості оцінок у логістичній регресії