Карпатський національний університет імені Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та інформатики і методики навчання

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему «Методи розв'язування ірраціональних рівнянь у шкільному курсі математики»

Виконала:
магістрантка групи СОМ(М)-2
спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)
Шимків Тетяна
(прізвище та ім'я здобувача освіти)

Керівник: д.ф.-м.н., проф.
Заторський Р. А.
(прізвище та ініціали)

Рецензент _____
(прізвище та ім'я)

Івано-Франківськ – 2025 р.

Вступ.....3
РОЗДІЛ 1. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЯК МАТЕМАТИЧНЕ ПОНЯТТЯ..... 6
1.1.Визначення, властивості та класифікація ірраціональних рівнянь.....7
1.2. Методи розв'язування рівнянь у шкільному курсі математики..... 12
1.3. Аналіз освітніх програм і підручників..... 15
1.4. Основні труднощі у вивченні ірраціональних рівнянь..... 17
РОЗДІЛ 2. ОГЛЯД МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ..... 21
2.1. Стандартні методи (піднесення до степеня, заміна змінних тощо). 21
Приклад..... 30
Зворотна підстановка..... 31
Перевірка в початковому рівнянні..... 31
Висновок.....31
Розв'язання квадратного рівняння..... 37
2.2. Використання властивостей функцій.....39
Основні властивості, які застосовують при розв'язуванні:..... 39
2.3. Графічний підхід.....43
Розв'язати рівняння:..... 44
Визначаємо область визначення:.....44
РОЗДІЛ 3. ІННОВАЦІЙНІ ПІДХОДИ ДО ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ У ШКОЛІ.....46
3.1. Використання інтерактивних технологій..... 46
Структура заняття (рекомендовано — 45–60 хв).....48
3.2. Методика дистанційного навчання ірраціональних рівнянь..... 55
3.3. Гейміфікація у навчанні.....59
Методика застосування гейміфікації при вивченні теми «Ірраціональні рівняння».....60
РОЗДІЛ4.АНАЛІЗ ПРАКТИЧНОГО ВПРОВАДЖЕННЯ ВИКЛАДЕНИХ ПІДХОДІВ..... 66
4.1. Досвід застосування запропонованих методів.....66
Організація та умови проведення експерименту.....66
4.2. Аналіз ефективності впроваджених методик.....71
4.3. Рекомендації для вчителів.....75
ВИСНОВКИ.....80
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....82

Вступ

Математика є фундаментальною наукою, що розвиває логічне мислення, аналітичні здібності та вміння знаходити нестандартні рішення. Однією з важливих тем шкільного курсу алгебри є ірраціональні рівняння, які відрізняються від звичайних раціональних рівнянь наявністю підкореневих виразів із змінною. Такі рівняння відіграють значну роль у формуванні математичної компетентності учнів, оскільки їх розв’язування вимагає не лише знання базових алгебраїчних операцій, а й уміння аналізувати структуру виразів, застосовувати перетворення, оцінювати умови існування коренів та контролювати правильність отриманих результатів.

Актуальність теми обумовлена тим, що, незважаючи на великий обсяг методичних матеріалів та підручників, учні часто стикаються з труднощами під час розв’язування ірраціональних рівнянь. Типові проблеми виникають через недостатнє розуміння природи підкореневих виразів, невміння застосовувати різні методи розв’язування та контроль правильності отриманих коренів. Це свідчить про необхідність систематизації та глибокого аналізу існуючих методів, а також пошуку ефективних підходів до їх викладання у школі.

Вивчення ірраціональних рівнянь не лише розширює математичний кругозір учнів, але й розвиває критичне мислення, вміння аналізувати математичні висловлювання та застосовувати знання на практиці. Крім того, ефективне навчання методам розв’язування таких рівнянь сприяє підготовці школярів до вивчення вищої математики та розв'язування більш складних задач у майбутньому.

Мета дослідження – проаналізувати існуючі методи розв’язування ірраціональних рівнянь, які викладаються у шкільному курсі математики,

виявити їх переваги та недоліки та розробити рекомендації щодо ефективного застосування цих методів у навчальному процесі.

Завдання дослідження:

1. Дати визначення ірраціонального рівняння та класифікувати його типи у межах шкільної програми.
2. Проаналізувати традиційні та сучасні методи розв’язування ірраціональних рівнянь, що застосовуються у навчальному процесі.
3. Дослідити типові помилки учнів під час розв’язування ірраціональних рівнянь та визначити причини їх виникнення.
4. Розробити методичні рекомендації щодо підготовки уроків та вправ для ефективного засвоєння учнями методів розв’язування ірраціональних рівнянь.
5. Продемонструвати практичну значущість обраних методів на прикладах розв’язання задач різного рівня складності.

Об’єктом дослідження є процес навчання розв’язуванню ірраціональних рівнянь у шкільному курсі математики.
Предметом дослідження є методи розв’язування ірраціональних рівнянь та їх ефективність у процесі навчання учнів.

Результати даного дослідження можуть бути використані в освітньому процесі для підвищення ефективності викладання математики, а також при розробці навчально-методичних матеріалів для вчителів, репетиторів та підготовки учнів до олімпіад та контрольних робіт.

Крім того, у процесі дослідження особлива увага буде приділена методологічним аспектам. Зокрема, застосовується системний підхід до аналізу ірраціональних рівнянь, що включає класифікацію їх видів, розгляд логічних схем розв’язування та порівняння ефективності різних

методів у навчальному процесі. Це дозволяє не лише визначити найбільш оптимальні способи розв’язання, а й адаптувати їх для різного рівня підготовки учнів.

Практичне значення дослідження полягає у можливості використання отриманих результатів при підготовці уроків, розробці навчальних вправ, методичних рекомендацій та тестових завдань для учнів. Застосування систематизованих методів розв’язування ірраціональних рівнянь сприятиме підвищенню рівня математичної грамотності школярів, розвитку критичного мислення, а також полегшить процес підготовки до контрольних, олімпіад та зовнішнього незалежного оцінювання.

Перспективи подальших досліджень у цій сфері можуть бути пов’язані з впровадженням інтерактивних та комп’ютерних методів навчання, створенням мультимедійних посібників для самостійного опрацювання теми, а також розробкою методик диференційованого навчання з урахуванням індивідуальних особливостей учнів.

Таким чином, проведене дослідження дозволяє не лише систематизувати та проаналізувати методи розв’язування ірраціональних рівнянь у шкільному курсі, але й визначити ефективні шляхи підвищення результативності навчання цієї теми, що підтверджує актуальність і практичну значущість роботи.

РОЗДІЛ 1. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЯК МАТЕМАТИЧНЕ ПОНЯТТЯ

Розв’язання ірраціональних рівнянь бере свій початок ще з давніх часів. Відомо, що ще античні математики (Піфагор, Евклід) розглядали питання коренів та рівнянь із радикалами. Згодом, у XVII-XVIII століттях, значний внесок у розвиток методів розв’язання зробили такі математики, як Рене Декарт та Леонард Ейлер.

У сучасному шкільному курсі математики ірраціональні рівняння займають важливе місце, особливо в старших класах, де учні знайомляться з методами піднесення до степеня, областю визначення функцій та графічними методами розв’язання.

1.1.Визначення, властивості та класифікація ірраціональних рівнянь

Визначення ірраціонального рівняння

У математиці **ірраціональними рівняннями** називають такі рівняння, в яких змінна знаходиться **під знаком кореня** (радикала) або в **показнику дробового степеня**. Іншими словами, це рівняння, що містять ірраціональні вирази, тобто вирази, які включають радикали.

Формально можна записати так: ірраціональним називається рівняння, яке має вигляд: $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Приклади ірраціональних рівнянь:

- ☐ $\sqrt{x + 2} = 3$
- ☐ $\sqrt{2x - 5} + x = 7$

Властивості ірраціональних рівнянь

Ірраціональні рівняння мають низку особливостей, які відрізняють їх від алгебраїчних рівнянь інших типів. Основними властивостями є:

1. **Наявність області визначення (ОДЗ).**
    - Для парних коренів (наприклад, квадратний корінь $\sqrt{x}$) підкореневий вираз має бути невід'ємним: g(x)≥0.
    - Для непарних коренів($\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[5]{x}$ тощо) обмежень немає, оскільки такі корені існують для будь-яких дійсних чисел.
2. **Потреба у перевірці знайдених розв'язків.**

    Оскільки при піднесенні обох частин рівняння до степеня (що є основним методом розв'язання ірраціональних рівнянь) можуть виникати **сторонні корені**, усі знайдені значення необхідно підставляти назад у вихідне рівняння.
3. **Нееквівалентність перетворень.**

    Багато перетворень (наприклад, піднесення до квадрату, множення обох частин на вираз зі змінною) можуть змінювати множину розв'язків. Це вимагає обережності у процесі розв'язування.
4. **Можливість зведення до алгебраїчних рівнянь.**

    Більшість ірраціональних рівнянь можна розв'язати шляхом піднесення до степеня та алгебраїчних перетворень, у результаті чого вони зводяться до багаточленів, дробово-раціональних або трансцендентних рівнянь.
5. **Існування еквівалентних і нееквівалентних перетворень.**
    - Еквівалентні перетворення (не змінюють множину розв'язків): винесення спільних множників, перенесення членів рівняння, піднесення до непарного степеня тощо.
    - Нееквівалентні перетворення (можуть додати сторонні корені): піднесення до парного степеня, множення обох частин на вираз, що містить змінну.

Класифікація ірраціональних рівнянь

Ірраціональні рівняння поділяють на кілька типів залежно від структури та розташування радикалів:

Прості ірраціональні рівняння.

Характеризуються наявністю одного радикала, який стоїть окремо.

Приклад: $\sqrt{x+3}=5$.

Метод розв'язання – ізолювання радикала і піднесення обох частин до відповідного степеня, тоді отримаємо:

Підносимо обидві частини до квадрату (щоб позбутися квадратного кореня):

$$x+3=5^2;$$

$$x+3=25;$$

$$x=22.$$

Перевірка

Підставимо x=22 у початкове рівняння:

$$\sqrt{22+3}=\sqrt{25}=5,$$

Все вірно, тому **розв'язок правильний**.

Множина розв'язків :$\{22\}$.

Змішані ірраціональні рівняння.

У таких рівняннях радикал поєднується з раціональною частиною, тобто містить і підкореневі, і позакореневі члени.

Приклад: $\sqrt{x+1}+x=1$

Розв'язування:

Перенесемо змінну у праву частину

$\sqrt{x+1}=1-x$

Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння

$x+1=1-2x+x^2$

Скоротимо однакові члени в обох частинах рівняння

$x=-2x+x^2$

Перенесемо все в одну частину та зводимо подібні доданки

$3x-x^2=0$

Розкладемо на множники та знайдемо корені

$x(3-x)=0$

$x=0,\ 3-x=0$

$x=0,\ x=3$- не є розв’язком рівняння.

Перевірка коренів у початковому рівнянні.

Для х=0:

$\sqrt{0+1}+0=1+0=1.$

Для х=3:

$$\sqrt{3 + 1} + 3 = 2 + 3 = 5 \neq 1.$$

Розв’язок: $\{0\}$.

Багатокореневі ірраціональні рівняння.

Містять кілька радикалів.

Приклад: $\sqrt{x + 3} + \sqrt{2x - 5} = 7$

Метод: ізоляція одного радикала, піднесення до степеня, повторення процедури

Раціонально-ірраціональні рівняння.

Радикальні вирази поєднуються з дробово-раціональними.

Приклад: $\frac{\sqrt{x+1}}{x-2} = 3$

Важливо враховувати умови існування знаменника та підкореневого виразу, тобто перевіряти, щоб знаменник не дорівнював нулю, а під квадратним коренем не було від’ємного числа. Крім того, потрібно ізолювати радикал, піднести обидві частини рівняння до відповідного степеня, розв’язати отримане рівняння і обов’язково перевірити всі знайдені корені на відповідність початковому рівнянню та ОДЗ, відкидаючи сторонні розв’язки.

Ірраціональні рівняння з параметрами.

Підкореневий вираз залежить від параметра.

Приклад: $\sqrt{x + a} = 2x$

Множина розв’язків визначається значенням параметра a.

Ірраціональні рівняння особливого виду.

Рівняння з радикалами у двох частинах:

$$\sqrt{x + 1} = \sqrt{2x - 3}$$

Рівняння з вкладеними радикалами:

$$\sqrt{x + \sqrt{x + 2}} = 3.$$

Кубічний радикал:

$$\sqrt[3]{x + 2} + x = 4.$$

1.2. Методи розв’язування рівнянь у шкільному курсі математики

Рівняння є одним із центральних понять у шкільному курсі математики. Володіння методами їх розв’язування не лише розвиває логічне мислення учнів, але й формує базові компетентності, необхідні для подальшого вивчення алгебри, геометрії, аналізу та прикладних дисциплін.

У сучасній методиці навчання математики рівняння розглядаються не тільки як інструмент обчислення невідомих, а й як засіб моделювання реальних процесів та явищ. Відповідно, ефективне опанування різних методів розв’язування рівнянь у шкільному курсі є важливою складовою формування математичної грамотності.

У вітчизняній методиці (Мерзляк, Тарасенкова, Скворцова, Бевз та ін.) наголошується, що оволодіння методами розв’язування рівнянь є одним із ключових результатів шкільної математичної освіти, оскільки:

- забезпечує практичні обчислювальні навички;
- сприяє розвитку логічного та алгоритмічного мислення;

- формує здатність до математичного моделювання реальних задач.

Означення: Областю визначення рівняння $f(x)=g(x)$ називають множину
$D(f)\cap D(g)$.
Кожний корінь рівняння належить до його області визначення.
Означення: Рівняння $f_1(x)=g_1(x)$ і $f_2(x)=g_2(x)$ називають рівносильними, якщо множини їхніх коренів рівні.
Це означає, що якщо будь-який корінь рівняння $f_1(x)=g_1(x)$, що належить множині M,є коренем рівняння $f_2(x)=g_2(x)$, а будь-який корінь рівняння $f_2(x)=g_2(x)$, що належить множині M, є коренем рівняння $f_1(x)=g_1(x)$, то такі два рівняння називають рівносильними на множині M.

Наприклад, рівняння $x^2-1=0$ і $x=-1$ рівносильні на множині $(-\infty;0)$.
Теорема 1.1: Якщо до обох частин даного рівняння додати(або від обох частин відняти) одне й те ж число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.
Теорема 1.2: Якщо обидві частини рівняння помножити(поділити) на одне й те ж відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.
Означення: Якщо множина розв'язків першого рівняння є підмножиною множини розв'язків другого рівняння, то друге рівняння називають **наслідком** першого рівняння.
Зазначимо, що коли два рівняння є рівносильними, то кожне з них є наслідком другого.
Корені рівняння-наслідку, які не є коренями даного рівняння, називають сторонніми коренями даного рівняння.
Якщо під час розв'язування рівняння рівносильність було порушено й

відбувся перехід до рівняння-наслідку, то отримані при цьому сторонні корені,

як правило, можна виявити за допомогою перевірки.

Приклад 1 Розв’яжемо рівняння

$$\sqrt[5]{x^2 - 6} = \sqrt[5]{-x}$$

Розв’язання: Піднесемо обидві частини даного рівняння до п’ятого степеня. Отримаємо рівносильне рівняння:

$$(\sqrt[5]{x^2 - 6})^5 = (\sqrt[5]{-x})^5$$

Звідси,

$$x^2 - 6 = -x,$$

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25.$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1-5}{2} = -3,$$

$$x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

Зробимо перевірку:

Для x=-3:

$$\sqrt[5]{(-3)^2 - 6} = \sqrt[5]{-(-3)},$$

$$\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3}.$$

Для x=2:

$$\sqrt[5]{(2)^2 - 6} = \sqrt[5]{-2},$$

$$\sqrt[5]{-2} = \sqrt[5]{-2}.$$

Відповідь: $x_1 = -3,\ x_2 = 2.$

Розв’язуючи приклад 1, ми спрощували вирази виду $(\sqrt[n]{f(x)})^n$,де n-натуральне число. Розглянемо випадок, коли *n* — парне натуральне число.

Приклад 2 Розв’яжемо рівняння

$$\sqrt{6x + 8} = \sqrt{2x - 4}$$

Розв’язання: Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата

$$(\sqrt{6x + 8})^2 = (\sqrt{2x - 4})^2,$$

$$6x + 8 = 2x - 4,$$

$$4x = -12,$$

$$x = -3.$$

Перевірка:

$$\sqrt{6 \cdot (-3) + 8} = \sqrt{2 \cdot (-3) - 4}$$

$$\sqrt{-4} \neq \sqrt{-10}$$

Перевірка показує, що число –3 не є коренем вихідного рівняння. Отже, рівняння не має коренів. Причина появи стороннього кореня полягає в тому,

що застосування формули $\sqrt{a}^2$ приводить до розширення області визначення рівняння.

Відповідь: коренів немає.

Приклад 3 Розв’яжемо рівняння

$$\sqrt{2x + 8} = x$$

Розв’язання: Підносячи обидві частини рівняння до квадрата, отримаємо рівняння, яке є наслідком даного:

$$8 + 2x = x^2,$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0,$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = 4.$$

Перевірка показує, що число –2 не є коренем, а число 4 задовольняє дане

Відповідь: $x=4$.

1.3. Аналіз освітніх програм і підручників

Сучасні українські освітні програми з математики для старшої школи (10–11 класи) приділяють значну увагу темі ірраціональних рівнянь, оскільки вона формує у учнів логічне та аналітичне мислення, навички аналізу математичних виразів та уміння застосовувати різні способи розв’язування рівнянь.

Програми визначають основні компетенції, які повинні сформуватися у школярів:

1. Визначення області визначення ірраціональних виразів – обов’язковий перший крок перед розв'язанням будь-якого рівняння з коренями.
2. Застосування різних методів розв’язування – піднесення обох частин рівняння до квадрата, введення нової змінної, використання перетворень та розкладу на множники.
3. Контроль коренів – перевірка отриманих розв’язків на відповідність початковому рівнянню для запобігання появі сторонніх коренів.

Таким чином, освітні програми забезпечують комплексний підхід, поєднуючи теоретичну підготовку з практичними навичками розв’язання задач різного рівня складності. Це сприяє формуванню математичної компетентності, розвитку самостійності та критичного мислення.

Аналіз шкільних підручників показує, що розв’язування ірраціональних рівнянь висвітлюється системно та поетапно:

1. **Визначення області допустимих значень** – це перший і найважливіший етап, оскільки він забезпечує правильність подальших дій.
2. **Методи розв'язування**:
    - Піднесення обох частин рівняння до квадрата, що дозволяє позбутися коренів і перейти до раціонального рівняння;
    - Введення нової змінної, що спрощує структуру рівняння;
    - Розклад на множники та використання стандартних перетворень, що дозволяє перейти до відомих видів рівнянь і розв'язати їх стандартними способами.
3. **Контроль коренів** – обов'язковий етап перевірки, який допомагає уникнути появи сторонніх коренів.

Підручники також містять приклади різного рівня складності, починаючи від простих ілюстративних завдань до складних комбінованих задач із параметрами. Це дозволяє учням поступово формувати навички, застосовувати різні методи та порівнювати їх ефективність у різних ситуаціях.

Методичні рекомендації щодо викладання теми підкреслюють значення інтегрованого підходу:

- **Проблемне навчання** – створення ситуацій, у яких учні самостійно шукають способи розв'язання, що стимулює аналітичне мислення.
- **Поєднання теорії та практики** – одночасне пояснення методів і виконання вправ для закріплення навичок.
- **Використання графічних та інтерактивних засобів** – побудова графіків функцій, демонстрація зміни коренів залежно від параметрів, застосування комп'ютерних програм для моделювання задач.

Такий підхід дозволяє:

- Зменшити кількість типових помилок учнів, таких як нехтування областю визначення або поява сторонніх коренів;
- Підвищити зацікавленість учнів у вивченні теми;
- Розвивати аналітичне та критичне мислення, що є ключовим для розв’язування ірраціональних рівнянь.

1.4. Основні труднощі у вивченні ірраціональних рівнянь

Вивчення ірраціональних рівнянь у шкільному курсі математики є одним із найскладніших етапів навчання алгебри, оскільки воно поєднує кілька аспектів: формальні операції з алгебраїчними виразами, аналіз структури рівняння, логічне мислення та перевірку правильності отриманих результатів. Аналіз освітніх програм, підручників та методичних матеріалів показує, що учні найчастіше стикаються з низкою труднощів, які можна систематизувати за кількома напрямами.

Визначення області допустимих значень (ОДЗ)

Однією з ключових складностей є **невміння правильно визначати область допустимих значень змінної**, що є необхідним етапом перед розв'язанням будь-якого ірраціонального рівняння. Підкореневі вирази накладають обмеження на змінну (наприклад, підкореневий вираз повинен бути невід’ємним у випадку квадратного кореня), і нехтування цим правилом призводить до появи помилкових або сторонніх коренів. Учні часто розглядають рівняння формально, виконуючи математичні операції без аналізу допустимих значень, що негативно впливає на правильність розв’язання.

Поява сторонніх коренів

Ще однією поширеною проблемою є **поява сторонніх коренів після піднесення обох частин рівняння до квадрата**. Піднесення до степеня змінює початкову структуру рівняння, що може створювати додаткові розв'язки, які не задовольняють оригінальне рівняння. Недостатній контроль учнів за цим етапом часто призводить до неправильного завершення розв'язання та формування хибних навичок. Вчителю необхідно наголошувати на обов'язковості перевірки кожного знайденого кореня підстановкою.

Вибір методу розв'язання

Учні часто **не можуть самостійно обрати ефективний метод розв'язання рівняння**. Доступні методи включають піднесення до квадрата, введення нової змінної, розклад на множники або використання графічного способу. Через відсутність системного розуміння структури ірраціональних рівнянь учні іноді застосовують громіздкі або неефективні обчислювальні прийоми, що ускладнює процес і підвищує ймовірність помилок.

Складність комбінованих і параметричних задач

Розв'язування **комбінованих задач**, де ірраціональні рівняння поєднуються з іншими видами рівнянь (раціональними, квадратичними або тригонометричними), а також задач з параметрами, створює додаткові труднощі. Учні часто не вміють структурувати процес розв'язання та визначати послідовність застосування різних методів. Це призводить до хаотичного виконання дій і отримання неправильних результатів.

Недостатнє використання наочних та графічних методів

Однією з педагогічних проблем є **обмежене застосування графічних та наочних методів**, які значно спрощують сприйняття матеріалу. Використання графіків функцій дозволяє учням наочно оцінити поведінку підкореневих виразів, визначити кількість та розташування коренів, а також перевірити отримані розв'язки. Брак візуалізації зменшує ефективність навчання та ускладнює засвоєння матеріалу.

Психологічні та мотиваційні фактори

Крім технічних труднощів, існують **психологічні бар'єри**, що впливають на процес навчання:

- страх перед складними обчисленнями;
- невпевненість у власних силах;
- низька мотивація до опанування теми через її абстрактність.

Ці фактори можуть призводити до поверхневого виконання завдань, формування помилкових стратегій розв'язання та загального негативного ставлення до теми.

Основними труднощами у вивченні ірраціональних рівнянь є:

1. Невміння визначати область допустимих значень;
2. Поява сторонніх коренів після піднесення до степеня;
3. Вибір неправильного або неефективного методу розв'язання;
4. Складність комбінованих та параметричних задач;
5. Недостатнє використання графічних та наочних методів;
6. Психологічні бар'єри та низька мотивація учнів.

Виявлення та систематизація цих труднощів є важливою передумовою для розробки ефективних методичних рекомендацій, які дозволяють

підвищити результативність навчання, зменшити кількість типових помилок та стимулювати розвиток аналітичного мислення у школярів.

РОЗДІЛ 2. ОГЛЯД МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Ірраціональні рівняння — це рівняння, в яких невідома змінна міститься під знаком кореня (найчастіше квадратного, рідше кубічного або іншого степеня). Вони відрізняються від звичайних алгебраїчних рівнянь тим, що пряме застосування стандартних методів, таких як приведення подібних членів чи використання формули квадратного рівняння, зазвичай неможливе. Для їх розв'язування у шкільному та початковому університетському курсі математики використовуються стандартні методи, основні серед яких — піднесення до степеня та заміна змінної.

Ці методи не лише дозволяють спростити вирази, а й закладають основу для більш складних аналітичних та чисельних методів розв'язування.

2.1. Стандартні методи (піднесення до степеня, заміна змінних тощо)

У шкільному курсі математики та в подальшому вивченні алгебри і аналізу особливе місце займає розв'язування ірраціональних рівнянь. Під ірраціональними розуміють такі рівняння, в яких невідома величина міститься під знаком кореня. Через наявність ірраціональних виразів їх розв'язування відрізняється від класичних алгебраїчних рівнянь і потребує застосування спеціальних методів. Базовими, або стандартними, серед них вважають піднесення до степеня, ізоляцію кореня та заміну змінних.

Ці методи є фундаментом для засвоєння учнями теми, адже вони формують розуміння основних принципів роботи з ірраціональними виразами та дозволяють побудувати алгоритмічний підхід до розв'язування задач. Нижче детально розглянемо кожен із них.

Метод, що грунтується на знаходженні ОДЗ.

Рівняння називається ірраціональним, якщо змінна входить під знак радикала або змінну піднесено до степеня з дробовим показником.

Приступаючи до розв'язання ірраціональних рівнянь, іноді корисно попередньо визначити ОДЗ, бо, можливо, це рівняння не визначене в області

дійсних чисел. Спершу знаходимо ОДЗ на підставі того, що $\sqrt{f(x)}$ має зміст за

умови f(x)≥0. Під час розв’язання перевіряємо, чи знайдені корені входять до ОДЗ.

Також потрібно відмітити, що

1. Всі корені парного степеня, які входять в рівняння є арифметичними.

Інше кажучи, якщо підкореневий вираз від’ємний, то рівняння кореня не має.

Якщо підкореневий вираз дорівнює нулю, то коренем рівняння також дорівнює

нулю. Якщо підкореневий вираз додатній, то і корінь рівняння є додатній.

2. Всі корені непарного степеня, які входять в рівняння, визначені при будь якому дійсному значенні підкореневого виразу. Іншими словами корінь від’ємний, якщо підкореневий вираз від’ємний. Корінь дорівнює нулю, якщо

підкореневий вираз дорівнює нулю. Корінь додатній, якщо підкореневий вираз

додатній.

3. Функції $y = \sqrt[2n]{x}$, $y = \sqrt[2n+1]{x}$ є зростаючими на своїй області існування.

Використовуючи ці властивості, в деяких випадках можна визначити, що рівняння не має розв’язку, не розв’язуючи його.

Приклад Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+3} = -5$$

Розв'язання: Арифметичний корінь не може дорівнювати від'ємному числу, тому рівняння не має розв'язку.

Відповідь: коренів немає.

Приклад Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+5} = 0$$

Розв'язання: Кожен доданок лівої частини невід'ємний, тому сума рівна нулю, якщо обидва доданки рівні нулю одночасно. Перший доданок рівний нулю коли $x=-2$, а другий коли $x=-5$.Тому рівняння розв'язку не має.

Відповідь: коренів немає.

Приклад 3 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{-x-3} = \sqrt[3]{x-8}$$

Розв'язання: Вираз $\sqrt{-x-3}$ визначений при $x\leq -3$. При таких х вираз $\sqrt[3]{x-8} <0$, тому рівняння розв'язку немає.

Відповідь: коренів немає.

Приклад Розв'язати рівняння

$$(x^2 + 5x - 6)\sqrt{x+2} = 0$$

Розв'язання: Знайдемо ОДЗ даного рівняння:

$x+2\geq 0$;

$x\geq -2$;

Добуток дорівнює нулю, коли хоча б один множник дорівнює нулю.

Одержимо:

$$(x^2 + 5x - 6) = 0,\ \sqrt{x+2} = 0$$

$$x_1 = -6,\ x_2 = 1,\quad x_3 = -2.$$

Враховуючи ОДЗ корінь $x= -6$ є сторонній.

Відповідь: $x_1 = 1,\quad x_2 = -2.$

Приклад Розв’язати рівняння

$$\sqrt{-\ 5\ -\ x} = \sqrt[5]{x\ -\ 20}$$

Розв’язання: Знайдемо ОДЗ рівняння :

$-5-x\geq 0,$

$x\leq -5,$

Враховуючи ОДЗ права частина є від’ємною, а ліва невід’ємна.

Відповідь: коренів немає.

Метод ізоляції кореня

Для спрощення процесу перед піднесенням до степеня доцільно ізолювати ірраціональний вираз, тобто залишити його в одній частині рівняння.

Наприклад:

$$\sqrt{2x\ +\ 5}\ -\ x\ =\ 1,$$

$$\sqrt{2x\ +\ 5\ =\ x\ +\ 1},$$

Далі застосовуємо піднесення до степеня:

$$2x\ +\ 5\ =\ (x\ +\ 1)^2,$$

$$2x\ +\ 5\ =\ x^2\ +\ 2x\ +\ 1,$$

$$x^2\ -\ 4\ =\ 0,$$

$$x\ =\pm\ 2.$$

Перевірка:

- при $x\ =\ 2$: $\sqrt{2\ \cdot\ 2\ +\ 5}\ -\ 2\ =\sqrt{9}\ -\ 2\ =\ 1$ -підходить;

- при $x = -2$: $\sqrt{2 \cdot (-2) + 5} - (-2) = \sqrt{1} + 2 = 3$ - сторонній корінь.

Отже, єдиний розв'язок: x=2.

Метод ізоляції є важливим кроком для зменшення складності обчислень та уникнення зайвих алгебраїчних перетворень.

Метод заміни змінних

Розв'язок ірраціональних рівнянь шляхом заміни його підкореневого виразу можна зробити таким чином:

1. Знайти ОДЗ вихідного рівняння.
2. Перейти від вихідного рівняння до рівняння з заміною
3. Знайти корені отриманого рівняння.
4. Перевірити, чи знайдені корені є коренями вихідного рівняння.

Перевірка полягає в наступному:

a) перевірити належність кожного знайденого кореня ОДЗ початкового
рівняння. Ці корені, які не належать ОДЗ, є сторонніми для вихідного рівняння;

b) для кожного кореня, який належить ОДЗ вихідного рівняння,
перевіряється чи мають однакові знаки ліва і права частини кожного з рівнянь,
які виникли в процесі розв'язку вихідного рівняння. Ці корені, для яких
частини рівнянь мають різні знаки, є сторонніми коренями для вихідного
рівняння;21

c) тільки ці корені, які належать ОДЗ вихідного рівняння і для яких обидві

частини кожного із рівнянь, які виникли в процесі розв'язку вихідного

рівняння, мають однакові знаки, перевіряються безпосередньою підстановкою в вихідне рівняння.

Заміна підкореневого виразу спрощує зведення ірраціонального рівняння до раціонального.

Приклад Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{x+11}-\sqrt[3]{x-4}=3$$

Розв'язання: Заміна

$$\sqrt[3]{x-4}=t,$$

$$x-4=t^3,\ x=t^3+4,$$

$$\sqrt{t^3+4+11}-t=3,$$

$$\sqrt{t^3+15}=3+t,$$

$$t^3+15=t^2+6t+9,$$

$$t^3-t^2-6t+6=0,$$

$$t^2(t-1)-6(t-1)=0,$$

$$(t-1)(t^2-6)=0,$$

$$t_1=1,\ t_2=\sqrt{6},\ t_3=-\sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{x-4}=1,\sqrt[3]{x-4}=\sqrt{6},\ \sqrt[3]{x-4}=-\sqrt{6},$$

$$x_1=5,\ x_2=4+6\sqrt{6},\ \ x_3=4-6\sqrt{6}.$$

Відповідь: $x_1=5,\ x_2=4+6\sqrt{6},\ \ x_3=4-6\sqrt{6}.$

Приклад:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5$$

Область допустимих значень (ОДЗ).

Потрібно, щоб підкореневі вирази були невід’ємні:

$x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$,

$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

Отже, ОДЗ: $x \geq 2$.

Заміна змінної.

Введемо $t = \sqrt{x-2}$. Тоді, $t \geq 0$ і $\sqrt{x+3} = \sqrt{(x-2)+5} = \sqrt{t^2+5}$.

Отримуємо: $\sqrt{t^2+5} + t = 5$.

Ізоляція і піднесення до квадрату.

$$\sqrt{t^2+5} = 5 - t.$$

Права частина має бути невід’ємною, отже $5 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 5$.

Тепер піднесемо до квадрату: $t^2 + 5 = (5-t)^2$;

$$t^2 + 5 = 25 - 10t + t^2.$$

Скорочуємо t^2:

$5=25-10t$,

$-20=-10t$,

$t=2$.

Перевірка умов:$t=2$ задовольняє $t \geq 0$ і $t \leq 5$.

Зворотна підстановка.

$$t = \sqrt{x - 2} = 2 \Rightarrow x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6.$$

Перевірка в початковому рівнянні.

$$\sqrt{6 + 3} + \sqrt{6 - 2} = \sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5.$$

Висновок: єдиний розв'язок прикладу - x=6.

Приклад: Розв'язати рівняння

$$\sqrt[7]{\frac{9-x}{x+1}} + \sqrt[7]{\frac{x+1}{9-x}} = 2$$

Розв'язання: Маємо корені 7 степеня. Оскільки цей степінь непарний, тому обмеження на змінну x виникнуть лише зі знаменниками дробів – вони не повинні бути рівні нулю. Звідси отримуємо дві нерівності, що задають область допустимих значень змінної x:

$$x + 1 \neq 0, \qquad x \neq 1.$$

$$9 - x \neq 0, \qquad x \neq 9.$$

Аналізуючи рівняння, бачимо, що дроби під коренями обернені. Тому доцільно зробити заміну змінних:

$$\sqrt[7]{\frac{9-x}{x+1}} = t$$

тоді $\sqrt[7]{\frac{9-x}{x+1}} = \frac{1}{t}$

Шляхом заміни, початкове рівняння зводиться до наступного

$$t + \frac{1}{t} = 2$$

$$t^2 - 2t + 1$$

$$(t - 1)^2 = 0$$

$$t = 1$$

Повернемося до заміни

$$\sqrt[7]{\frac{9-x}{x+1}} = 1$$

Піднесемо це рівняння до 7-го степеня:

$$\frac{9-x}{x+1} = 1,$$

$$9 - x = x + 1,$$

$$2x = 8,$$

$$x = 4.$$

Переконавшись, що x=1 є допустимим значенням змінної x, робимо висновок, що x=4 є коренем вихідного рівняння.

Відповідь: x=4

Послідовне піднесення до степеня

У випадках, коли рівняння містить кілька ірраціональних виразів (декілька коренів), просте одноразове піднесення до степеня не завжди дає можливість позбутися всіх радикалів. Тоді застосовують метод послідовного піднесення до степеня. Суть цього методу полягає у поступовому усуненні коренів: спочатку ізолюється один із них і виконується піднесення до відповідного степеня; після цього, у разі наявності ще одного кореня, процес повторюється.

Особливістю цього методу є його багатокроковість: на кожному етапі рівняння спрощується, але може з’являтися новий радикал, який потрібно усунути повторним піднесенням до степеня. Такий метод часто призводить до багаточленів високого степеня (квадратних, кубічних, а іноді й четвертого степеня), тому він вимагає уважності й обов’язкової перевірки знайдених розв’язків.

Приклад

Розв’яжемо рівняння:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}=4.$$

Область допустимих значень (ОДЗ).

$x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1,$

$x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 3.$

Тому ОДЗ: $x\geq 3$.

Ізоляція одного кореня.

Виділяємо перший корінь:

$$\sqrt{x+1}=4-\sqrt{x-3}.$$

Права частина має бути невід’ємною:

$$4-\sqrt{x-3}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-3}\leq 4 \Rightarrow x-3\leq 16 \Rightarrow x\leq 19.$$

Перше піднесення до степеня.

$$x+1=(4-\sqrt{x-3})^2.$$

Розкриваємо дужки:

$$x+1=16-8\sqrt{x-3}+x-3.$$

Спрощуємо праву частину:

$$x+5=x+13-8\sqrt{x-3}.$$

Спрощуємо праву частину:

$$5 = 13 - 8\sqrt{x - 3},$$

$$8\sqrt{x - 3} = 8,$$

$$\sqrt{x - 3} = 1.$$

Зворотна підстановка

З рівності $\sqrt{x - 3} = 1$ маємо:

x−3=1

x=4.

Перевірка в початковому рівнянні

Підставимо x=4:

$$\sqrt{4 + 5} + \sqrt{4 - 3} = \sqrt{9} + \sqrt{1} = 3 + 1 = 4,$$

рівність виконується і x=4 належить інтервалу [3,19].

Висновок

Єдиний дійсний розв’язок рівняння: x=4.

Рівносильні переходи від рівнянь із квадратними радикалами до відповідних систем нерівностей і рівнянь.

Для рівняння з головним квадратним коренем $\sqrt{\alpha(x)} = \beta(x)$ еквівалентна система (рівносильний перехід) записується як

$$\begin{cases} \beta(x) \geq 0, \\ \alpha(x) = \beta^2(x), \end{cases}$$

умова $\alpha(x) \geq 0$ вже випливає з рівності $\alpha(x) = \beta^2(x)$, тому її можна не писати окремо; але завжди треба контролювати область допустимих значень — ОДЗ.

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x + 11 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \Leftrightarrow x = 5 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases}$$

Отже, x= 5 - єдиний розв'язок.

Приклад

$$\sqrt{x^2(x-1)} = |x|.$$

Застосовуємо правило: тут праворуч стоїть $|x|$, а $|x| \geq 0$ завжди, отже рівносильною системою буде

$$\begin{cases} x^2(x-1) \geq 0 \ \text{(ОДЗ)} \\ x^2(x-1) \geq |x|^2. \end{cases}$$

Але $|x|^2 = x^2$, тому друге рівняння дає

$$x^2(x-1) = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2(x-2) = 0.$$

Отже можливі корені x=0 або x=2.

Тепер поєднаємо з ОДЗ: умова $x^2(x-1) \geq 0$ дає x=0 або x≥1. Обидва отримані корені лежать в ОДЗ:

- x=0 — дозволений;
- x=2 — також x ≥1.

Отже всі корені прийняті, і розв'язок рівняння: x=0,x=2.

Метод виділення повного квадрата.

Вирази, що стоять під знаком квадратного кореня, мають бути квадратами двочленів. Застосовуючи формулу $\sqrt{x^2}$=|x|, одержуємо рівняння з модулями.

Приклад Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-8x+16}$$

Розв'язання: Виділимо під радикалами повний квадрат:

$$\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=\sqrt{(x-4)^2}$$

або

$$|x+3|+|x-3|=|x-4|$$

Розв'язуємо рівняння на інтервалах $(-\infty;-3]$; $(-3;3]$;$(3;4]$;$(4;+\infty)$ і знаходимо корені рівняння:

1) $x\in(-\infty;-3]$, то одержимо рівняння:

$$-(x+3)-(x-3)=-(x-4),$$

$$-x-3-x+3=-x+4,$$

$$x=-4,$$

2) $x\in(-3;3]$, то одержимо рівняння:

$$(x+3)-(x-3)=-(x-4),$$

$$x+3-x+3=-x+4,$$

$x=-2$,

3) $x\in(3;4]$, то одержимо рівняння:

$(x+3)+(x-3)=-(x-4)$,

$x+3+x-3=-x+4$,

$x = \frac{4}{3}$ не належить (3;4]

4) $x\in (4;+\infty]$, то одержимо рівняння:

$(x+3)+(x-3)=(x-4)$,

$x+3+x-3=x-4$,

$x=-4$ не належить $(4;+\infty)$

Відповідь: $x1=-4$, $x2=-2$

Рівняння з кубічною ірраціональністю.

При піднесенні обох частин рівняння до третього степеня (непарного) завжди отримуємо рівняння, рівносильне даному (на його ОДЗ).

Приклад Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{3x+4}-\sqrt[3]{3x+2}=2$$

Розв'язання: При піднесенні обох частин до куба використаємо формулу

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$

Піднесемо обидві частини рівняння до третього степеня, отримаємо:

$$3x+4-3x-2-3\sqrt[3]{3x+4}\sqrt[3]{3x+2}(\sqrt[3]{3x+4}-\sqrt[3]{3x+2})=8$$

Оскільки $\sqrt[3]{3x+4}-\sqrt[3]{3x+2}=2$

$-3\sqrt[3]{3x+4}\sqrt[3]{3x+2}\cdot 2=6$,

$\sqrt[3]{3x+4}\sqrt[3]{3x+2}=-1$,

$(3x+4)(3x+2)=-1$,

$9x^2+18x+9=0$,

$x^2+2x+1=0$,

$x=-1$.

Відповідь: x=−1

Комбіновані методи

Ірраціональні рівняння часто містять декілька коренів або складні вирази, де застосування одного стандартного методу (піднесення до степеня, ізоляція кореня чи заміна змінних) не дає простого розв’язку. У таких випадках використовують комбінований підхід, який передбачає одночасне застосування декількох методів:

1. **Ізоляція одного кореня** — дозволяє спростити структуру рівняння.
2. **Піднесення до степеня** — усуває корінь після ізоляції.
3. **Заміна змінних** — зручна при повторюваних або складних підкореневих виразах.
4. **Винесення спільних множників і розкладання на формули скороченого множення** — спрощує алгебраїчні вирази після піднесення до степеня, допомагає перетворити рівняння до квадратного або лінійного виду.

Комбінування цих методів дозволяє розв’язувати складні рівняння, які інакше важко перетворити до стандартної форми.

Приклад:

$$\sqrt{x + 4} + \sqrt{2x - 3} = 7.$$

ОДЗ: x+4≥0,

x≥−4,

2x−3≥0,

x≥1.5

Отже, ОДЗ: x≥1.5

Ізоляція одного кореня

$$\sqrt{x + 4} = 7 - \sqrt{2x - 3},$$

Права частина ≥0: $\sqrt{2x - 3} \leq 7,$

$$2x - 3 \leq 49,$$

$$x \leq 26.$$

Далі x∈[1.5,26].

Піднесення до квадрата:

$$x + 4 = (7 - \sqrt{2x - 3})^2,$$

$$x + 4 = 49 - 14\sqrt{2x - 3} + 2x - 3,$$

$$14\sqrt{2x - 3} = x + 42,$$

$$\sqrt{2x - 3} = \frac{x+42}{14}.$$

Знову піднесемо до квадрата обдидві частини:

$$2x - 3 = \frac{x^2+84x+1764}{196},$$

$$392x - 588 = x^2 + 84x + 1746,$$

Переносимо все в один бік:

$$x^2 - 308x + 2352 = 0.$$

Розв’язання квадратного рівняння

Дискримінант:

$$D = (-308)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2352 = 94864 - 9408 = 85456 = 292^2.$$

$x_1 = \frac{-(-308)+\sqrt{85456}}{2 \cdot 1} = \frac{308+28\sqrt{109}}{2} = 154 + 14\sqrt{109}$, поза ОДЗ.

$x_2 = \frac{308-28\sqrt{109}}{2} = 154 - 14\sqrt{109}$ - є розв'язком рівняння.

Ірраціональні рівняння з параметрами

Приклад Розв’язати рівняння

$$\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$$

Розв'язання: $x^2 + ax - 2a = x^2 + 2x + 1,$ $(a - 2)x + 2a + 1,$

$x + 1 \geq 1;$ $x \geq 1;$

Якщо a = 2, то рівняння не має коренів

Якщо $a \neq 2$; то $x = \frac{2a+1}{a-2}$

Враховуючи, що x ≥ -1, одержимо: $\frac{2a+1}{a-2} \geq -1;$ $\frac{3a-1}{a-2} \geq 0,$

$$a \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup (2; \infty)$$

Відповідь: при $a \in (\frac{1}{3}; 2]$ рівняння не має коренів;

при $a \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup (2; \infty)$ $x = \frac{2a+1}{a-1}$

Нестандартні ірраціональні рівняння

Приклад Розв’язати рівняння

$$\sqrt[2021]{\frac{8-x}{x+4}} + \sqrt[2021]{\frac{x+4}{8-x}} = 2$$

Розв’язання Ми бачимо що корінь є непарної степені, тому під коренем може бути вираз будь-якого знаку. Знайдемо ОДЗ.

$x \neq -4$ і $x \neq 6$

Заміна

$$\sqrt[2021]{\frac{8-x}{x+4}} = t$$

тоді $\sqrt[2021]{\frac{x+4}{8-x}} = \frac{1}{t},\ t \neq 0$

Тоді рівняння перетвориться на таке, що зводиться до квадратного:

$$t + \frac{1}{t} = 2,$$

$$\frac{t^2-2t+1}{t} = 0,$$

$$(t-1)^2 = 0,$$

$$t = 1,$$

Повертаємось до заміни:

$$\sqrt[2021]{\frac{8-x}{x+4}} = 1,$$

звідки знаходимо, що

$8-x=x+4,$

$x=2$

Відповідь: $x=2$

2.2. Використання властивостей функцій

Важливим інструментом у процесі розв’язування ірраціональних рівнянь є застосування властивостей функцій, які входять до складу рівняння. На

відміну від суто алгебраїчних перетворень, цей підхід дозволяє використати якісні характеристики функцій, що значно полегшує процес аналізу рівнянь та дає можливість зробити висновки щодо кількості й характеру їхніх розв’язків.

Основні властивості, які застосовують при розв’язуванні:

1. Область визначення функції (ОДЗ).

   Для ірраціональних рівнянь першою умовою завжди є невід’ємність підкореневих виразів. Визначення області допустимих значень змінної дозволяє звузити множину потенційних розв’язків.
2. Область значень функції.

   У ряді випадків достатньо порівняти області значень лівої та правої частини рівняння, щоб зробити висновок про наявність або відсутність розв’язків. Якщо області значень не перетинаються, рівняння не має розв’язків.
3. Монотонність (зростання/спадання).

   Якщо обидві частини рівняння задають монотонні функції, то кількість розв’язків можна оцінити безпосередньо. Зокрема, якщо одна з функцій є зростаючою, а інша спадною, то рівняння може мати не більше одного розв’язку.
4. Парність та непарність функцій.

   Використання симетрії дозволяє скоротити обсяг обчислень, адже достатньо розглянути половину області визначення.
5. Обмеженість функцій.

   Якщо одна з функцій у рівнянні обмежена (наприклад, $x \geq 0 x \geq 0$), а інша виходить за межі цієї обмеженості, то рівняння може не мати розв’язків або мати лише обмежену кількість рішень.

Таким чином, використання властивостей функцій є не лише допоміжним прийомом, а й повноцінним методом розв'язування, що дозволяє робити попередній якісний аналіз рівняння ще до виконання алгебраїчних перетворень.

Приклад 1

$$\sqrt{2x + 1} = x - 1.$$

Розв'язання.

ОДЗ: $2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$. Оскільки ліва частина невід'ємна, то

$x-1 \geq 0$

$x \geq 1$. Остаточно $x \geq 1$.

Квадруємо: $2x + 1 = (x - 1)^2$,

$$2x + 1 = x^2 - 2x + 1,$$

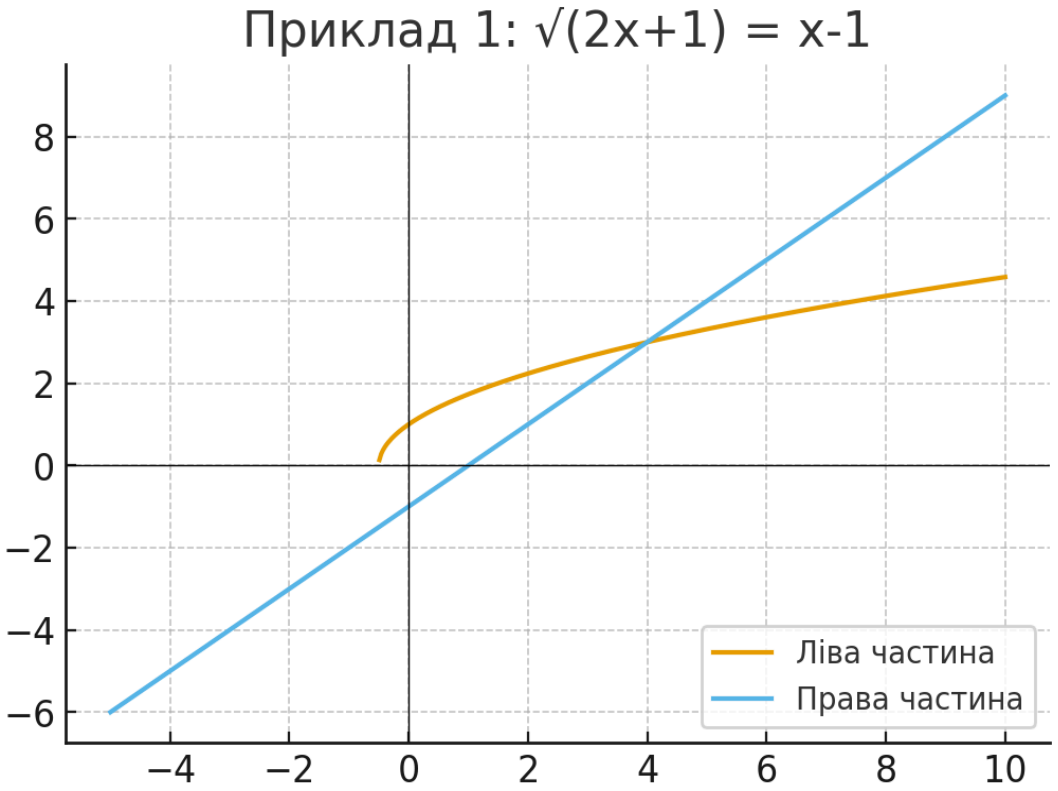
$$x^2 - 4x = 0,$$

$$x(x - 4) = 0,$$

$$x = 0,\ x = 4.$$

Перевірка: $x=0$ не належить ОДЗ. $x=4$: $\sqrt{9} = 3$, права частина 3 — підходить.

Відповідь: $x=4$.



Приклад 2

$$\sqrt{5x + 5} = x + 1$$

Розв’язання.

ОДЗ: $x \geq -1$.

Квадруємо: $5x + 5 = (x + 1)^2$

$$5x + 5 = x^2 + 2x + 1,$$

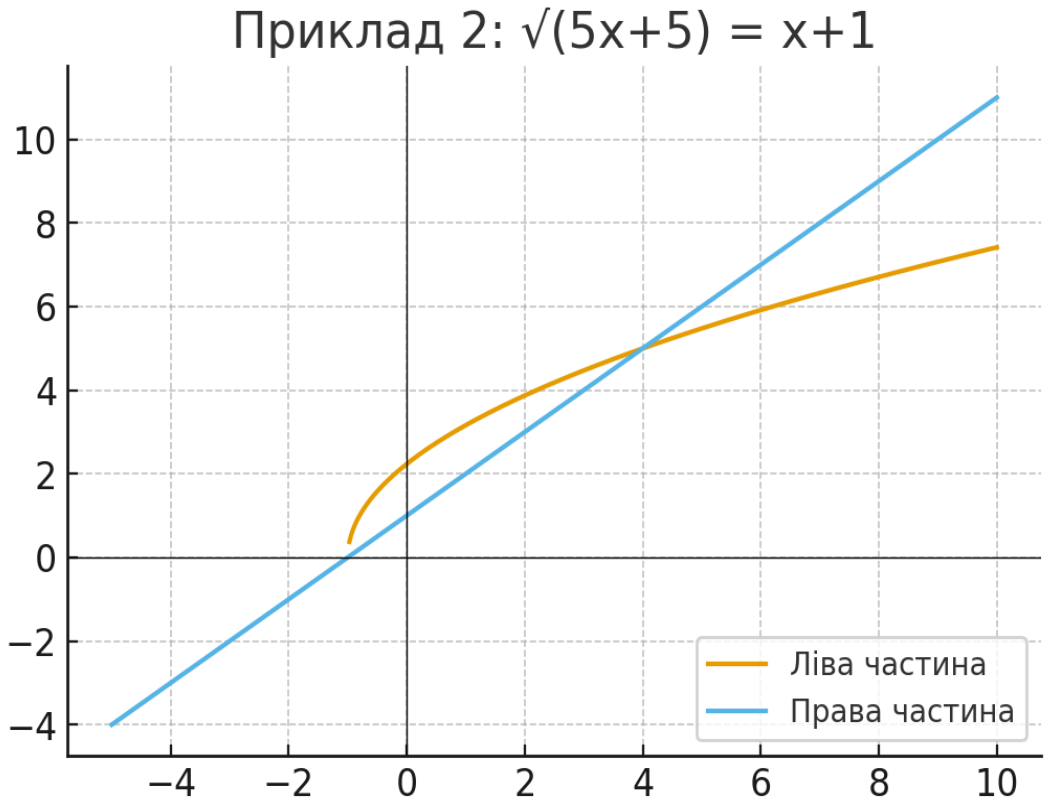
$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

Дискримінант D=25. Корені: $x=4$, $x=-1$.

Перевірка:

- x=−1: $\sqrt{0} = 0$, права частина 0 — підходить.
- x=4: $\sqrt{25} = 5$, права частина 5 — підходить.

Відповідь: x=−1, x=4.



Узагальнення

- З наведених прикладів видно, що при розв’язуванні ірраціональних рівнянь за допомогою властивостей функцій необхідно:
  виписати ОДЗ;
- зазначити додаткові логічні вимоги (наприклад, права частина ≥ 0, якщо ліворуч корінь);

- піднести до квадрату (або виконати іншу зворотну операцію), скоротити/перенести члени;
- розв’язати отримане алгебраїчне рівняння;
- ретельно перевірити кожен корінь в початковому рівнянні і відкинути сторонні корені.

Що показують ці приклади:

1. Як поєднання аналізу ОДЗ і перевірки знаків (обмеженість;невід’ємність) дозволяє швидко відсіювати неправильні корені після квадрування;
2. Як вибір рівнянь зручної структури дає цілі (і часто симетричні) корені;
3. Як інструменти властивостей функцій (монотонність, ОДЗ, області значень) економлять обчислення й дають інтуїтивне пояснення кількості коренів.

2.3. Графічний підхід

Графічний метод розв’язування ірраціональних рівнянь ґрунтується на уявленні рівняння у вигляді рівності двох функцій:

$f(x)=g(x)$.

У цьому випадку розв’язки рівняння відповідають абсцисам точок перетину графіків функцій $y=f(x)$ та $y=g(x)$.

Переваги графічного підходу:

1. **Наглядність.** За графіками можна легко оцінити кількість розв’язків, навіть не обчислюючи їх аналітично.

2. **Зручність у випадках складних виразів.** Якщо алгебраїчне розв’язування потребує складних перетворень, графічний метод дає можливість знайти розв’язки наближено.
3. **Перевірка аналітичного результату.** Графік дозволяє переконатися, що отримані корені справді є розв’язками.

Алгоритм використання графічного підходу:

1. Переписати рівняння у вигляді f(x)=g(x).
2. Побудувати графіки функцій y=f(x) та y=g(x) в одній системі координат.
3. Знайти точки їхнього перетину.
4. Координати абсцис точок перетину й будуть розв’язками рівняння.

Приклад

Розв’язати рівняння:

$$\sqrt{x + 5} = x - 1,$$

Визначаємо область визначення:

$x+5 \geq 0,$

$x \geq -5.$

Введемо функції:

$$f(x) = \sqrt{x + 5},\ g(x) = x - 1.$$

Аналітичне розв’язання:

$$x + 5 = (x - 1)^2,$$

$$x + 5 = x^2 - 2x + 1,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

$$D = -(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$$

$x_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3-5}{2} = -1,$

$x_2 = \frac{3+5}{2} = 4.$

Перевірка:

$x = 4$: $\sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3,\ 4-1 = 3 \Rightarrow$ підходить;

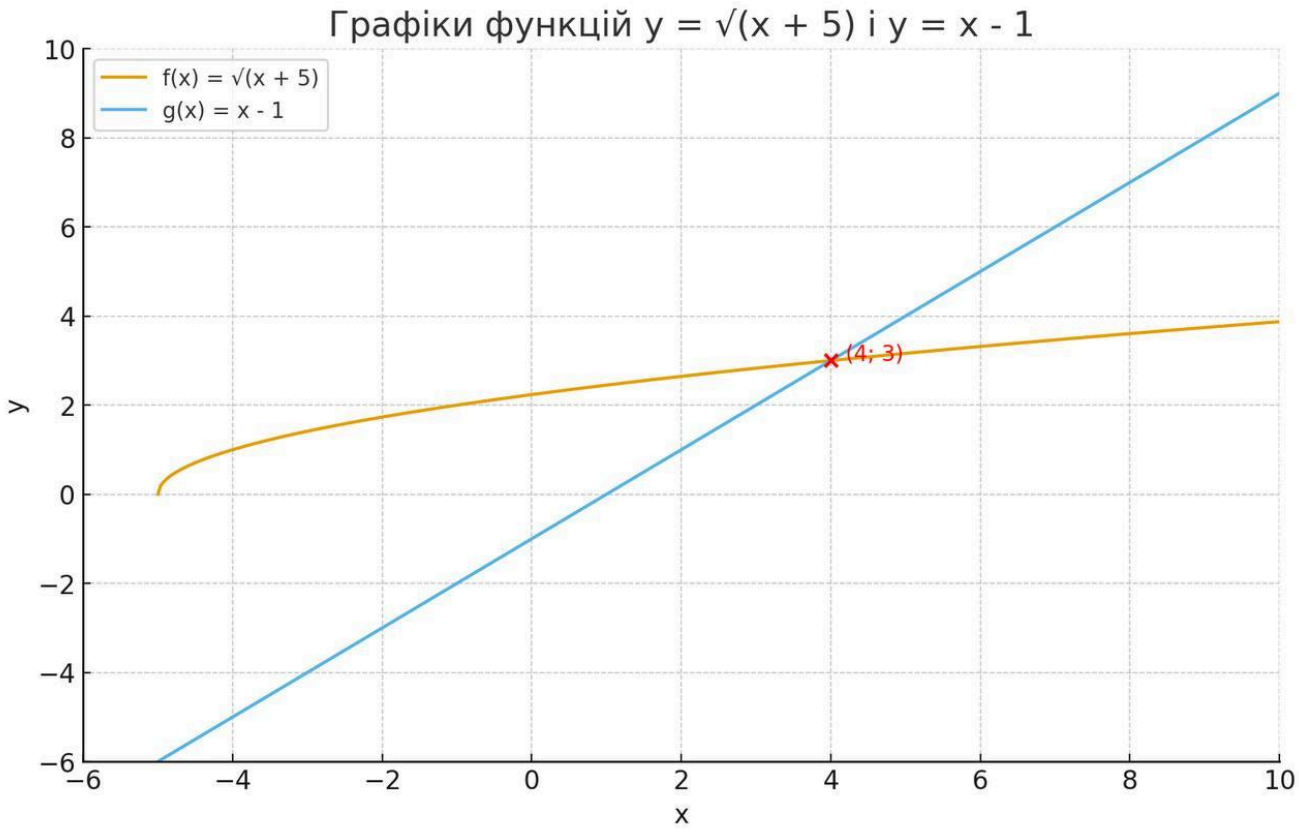
$x = -1$: $\sqrt{-1+5} = \sqrt{4} = 2,\ -1-1 = -2 \Rightarrow$ не підходить.

Висновок: єдиний розв'язок x=4.

Графік:

$y = \sqrt{x+5}$ – коренева крива, починається з $(-5, 0)$,

$y = x - 1$ – пряма, перетинає криву у точці x=4.



РОЗДІЛ 3. ІННОВАЦІЙНІ ПІДХОДИ ДО ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ У ШКОЛІ

3.1. Використання інтерактивних технологій.

Інтерактивні технології — це спосіб організації навчального процесу, що переводить учня з пасивної ролі слухача в активного дослідника. Для теми «Ірраціональні рівняння» це особливо важливо, оскільки ключові труднощі — область визначення, піднесення до степеня, поява сторонніх коренів — легше долаються шляхом візуалізації, моделювання та колективного обговорення.

Мета підпункту:

- підвищити розуміння суті ірраціональних рівнянь;
- навчити застосовувати кілька методів розв’язування і вміти обирати найдоцільніший;
- забезпечити вміння перевіряти корені та пояснювати виникнення сторонніх рішень;
- сформувати цифрові компетентності (робота з GeoGebra/Desmos, тестовими платформами).

Ключові компетентності учнів:

- математична грамотність (доведення, аналіз);
- інформаційно-цифрова грамотність (робота з діджитал-інструментами);
- комунікативна компетентність (усні презентації, дискусії);
- вміння вчитися (самостійне дослідження)

Після серії уроків з інтерактивними технологіями учні повинні:

1. Правильно знаходити область визначення ірраціональних рівнянь.
2. Коректно застосовувати алгоритм піднесення до квадрату (та інших степенів) і пояснювати, чому необхідна перевірка коренів.
3. Використовувати графічний метод (побудова графіків двох функцій і знаходження точок перетину) для перевірки алгебраїчних розв’язків.
4. Належно аргументувати вибір методу розв’язування в конкретній задачі.
5. Працювати з цифровими інструментами (ввести функцію, знайти Intersect, зберегти скрін тощо).

Структура заняття (рекомендовано — 45–60 хв)

Нижче — типовий сценарій на 60 хв.

1. Вступ (5 хв) — мотивація, постановка цілей, коротке опитування (фронтально).
2. Розігрів / «швидкі вправи» (7 хв) — 3 коротких завдання на область визначення.
3. Мікро-лекція + демонстрація (10 хв) — показ у GeoGebra двох прикладів (простий і з стороними коренями).
4. Робота в групах (20–25 хв) — кожна група отримує задачу, працює, створює коротку презентацію/скрін у GeoGebra.
5. Презентація результатів груп (10–12 хв) — виступи по 2–3 хв, дискусія.
6. Рефлексія і домашнє завдання (3–5 хв).

Детальний конспект уроку — по хвилинах з підказками вчителю

Вступ (0–5 хв)

Вчитель: «Сьогодні ми розв’язуватимемо ірраціональні рівняння трьома способами: алгебраїчно, графічно та комбіновано. На початку — коротке запитання: що повинні зробити обов’язково після піднесення до степеня?» Ціль: нагадати про перевірку коренів.

Розігрів (5–12 хв)

Три короткі запитання (усно або через Kahoot/Quizizz):

1. Знайти ОДЗ: $\sqrt{x + 3}$ — (відповідь:x≥−3).
2. Чи може рівняння $\sqrt{x} = -2$ мати розв’язок? — (ні).
3. Якщо $\sqrt{f(x)} = g(x)$, що потрібно перевірити після піднесення в квадрат? — (необхідно перевірити знак правої частини g(x)та ОДЗ).

Демонстрація (12–22 хв)

Показати на дошці + у GeoGebra приклад (детально — далі). Пояснити: при піднесенні до квадрату з’являються сторонні корені — чому так відбувається.

Робота в групах (22–47 хв)

Поділ на 3–4 групи. Кожна група отримує різне завдання (нижче — список). Вимагається:

- знайти розв’язок алгебраїчно;
- побудувати графіки функцій у GeoGebra або на папері;
- знайти та пояснити появу сторонніх коренів (якщо є);
- підготувати коротку презентацію (2–3 слайди або усний виступ).

Презентації (47–57 хв)

Кожна група 2–3 хв: показує графік, дає розв’язок і коротко пояснює перевірку.

Рефлексія та завдання додому (57–60 хв)

Коротке опитування: «Що нового ви сьогодні дізналися?» Домашнє: підготувати 2 своїх задачі з коренями (рівняння та короткий план розв’язування).

Конкретні інтерактивні завдання із розв’язками (рівні: базовий — середній — підвищений)

Завдання А (базовий рівень)

Розв’язати:$\sqrt{x+4} = x - 2$.

Розв’язок (крок за кроком):

1. ОДЗ: x+4≥0 ⇒ x≥−4.
2. Праву частину треба мати невід’ємною (оскільки ліва — невід’ємна): x−2≥0 ⇒ x≥2. Поєднання з ОДЗ дає x≥2.
3. Піднесемо обидві частини до квадрату (пам’ятаємо: це може дати сторонні корені):

   $$x + 4 = (x - 2)^2,$$

   $$x + 4 = x^2 - 4x + 4,$$

4. Переносимо в один бік:

   $$x^2 - 5x = 0$$

5. Розв’язуємо: x(x−5)=0

x=0, (x−5)=0

x=0 або x=5.

6. Перевірка щодо ОДЗ x≥2: x=0 не підходить; x=5 підходить.
7. Перевірка в початковому рівнянні: $\sqrt{5+4}=3,\ 5-2=3$. Отже єдиний розв'язок x=5.

*(*Цей приклад зручно демонструвати в GeoGebra: побудувати $y=\sqrt{x+4}\ i\ y=x-2$, побачити перетин у x=5.)

Завдання В (середній рівень)

Розв'язати: $\sqrt{2x-1}+1=x$.

Розв'язок:

1. ОДЗ: 2x−1≥0 ⇒ x≥$\frac{1}{2}$.
2. Переносимо:$\sqrt{2x-1}=x-1$. Оскільки ліве невід'ємне, потрібно x−1≥0 ⇒ x≥1. Поєднання з ОДЗ дає x≥1.
3. Квадрат: $2x-1=x^2-2x+1$.
4. Переносимо: $x^2-4x+2=0$.
5. Розв'язок квадратного:

$$D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 2=16-8=8.$$

$$x_1=\frac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\cdot 1}=2-\sqrt{2},$$

$$x_2=2+\sqrt{2}.$$

(У GeoGebra показати, що другий корінь — сторонній: побудувати функцію $f(x) = \sqrt{2x - 1} + x$ та лінію y=x.)

Завдання С (підвищений рівень)

Розв'язати: $\sqrt{x + 1} = \sqrt{2x - 5} + 1.$

Розв'язок:

ОДЗ: $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ та $2x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2{,}5$. Отже $x \geq 2{,}5$.

Квадрат: $x + 1 = 1 + 2\sqrt{2x - 5} + 2x - 5.$ Скорочуємо:

$x + 1 = 2x - 4 + 2\sqrt{2x - 5}.$

Переносимо: $5 - x = 2\sqrt{2x - 5}.$ Права частина невід'ємна, тому

$5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5$.

Поєднання з ОДЗ дає $2{,}5 \leq x \leq 5$.

Квадрат знову: $(5 - x)^2 = 4(2x - 5),$

$25 - 10x + x^2 = 8x - 20,$

$x^2 - 18x + 45 = 0.$

Дискримінант $D = -(-18) - 4 \cdot 1 \cdot 45 = 324 - 180 = 144.$

$x_1 = \frac{18-\sqrt{144}}{2 \cdot 1} = 3,$

$x_2 = \frac{18+\sqrt{144}}{2} = 15.$

Перевірка інтервалу $2{,}5 \leq x \leq 5$: x=15 не підходить, x=3 підходить. Перевірка в початковому рівнянні: $\sqrt{3+1} = 2$, $\sqrt{2 \cdot 3 - 5} + 1 = 1 + 1 = 2$. Значить розв'язок —x=3.

(Цей приклад добре демонструє множинне піднесення до степеня і необхідність поетапної перевірки Області визначення.)

Як саме використовувати GeoGebra / Desmos у класі (покроково)

(інструкція вчителю — щоб на уроці не витрачати час на «як це робиться»)

1. Відкрити GeoGebra (або Desmos).
2. В полі введення ввести першу функцію, наприклад f(x)=sqrt(x+4). GeoGebra намалює графік.
3. Ввести другу функцію g(x)=x-2.
4. Використати інструмент **Intersect** (перетин) — клацнути на графіки або увести Intersect(f,g) — отримаєте координати перетину (у прикладі це точка (5,3)).
5. Попросити групу, яка працює з цим рівнянням, зробити скрін і показати на уроці.
6. Пояснити: якщо алгебра дає ще корені — показати їх як точки на осі (вони не будуть точками перетину графіків).

Порада: під час демонстрації використовуйте зум/проектор і по черзі показуйте, як змінюється графік при підстановці параметра (наприклад, зробіть повзунок a і функцію h(x)=sqrt(x+a) щоб дослідити вплив зміщення).

Типові помилки учнів і як їх виправляти

1. **«Піднесемо до квадрату — значить корені правильні»**

   — Нагадати про ОДЗ і показати приклад, де після квадру з'явився сторонній корінь (детально на прикладі В).
2. **Ігнорування області визначення**

   — На початку розв'язування вимагати явного запису ОДЗ як обов'язкового кроку.
3. **Неправильна інтерпретація кореня (знак)**

   — Пояснювати, що $\sqrt{\cdot}$ — невід'ємна функція; якщо після операцій з'являється ±, треба пояснювати, звідки воно взялось.
4. **Технічні помилки при роботі з GeoGebra**

   — Підготувати інструкцію і "чекліст" перед початком групової роботи.

Для кожної помилки вчитель має підготувати короткий мікро-урок (2–3 хв) та вправу для виправлення.

Приклади завдань для командних активностей (сценарії)

Сценарій 1 — «Дослідницька група»

Кожна група отримує набір із 3 рівнянь (легке, середнє, складне). Завдання: знайти розв'язки алгебраїчно, зобразити в GeoGebra, підготувати пояснення — чому певні корені сторони.

Сценарій 2 — «Перегони у Kahoot»

Коротке змагання за 10 питань: ОДЗ, істина/брехня про операції з коренями, вибір правильної перевірки.

Сценарій 3 — «Мистецтво пояснення»

Кожна група отримує одну помилково розв'язану задачу — вони мають знайти помилку, підготувати слайд з поясненням і доповісти.

Рекомендації щодо забезпечення уроку (техніка, матеріали)

- Проектор або інтерактивна дошка;
- Принаймні 1 пристрій на групу (ноутбук/планшет/телефон) з доступом до GeoGebra/Desmos;
- Роздруківки із “чеклістом” кроків при розв’язуванні ірраціональних рівнянь;
- Шаблони слайдів або аркуші для презентації результатів;
- Підготовлені питання для дискусії (чек-лист помилок).

Поради вчителю (педагогічні підходи)

- Починайте з простих прикладів і демонструйте помилки — це формує критичне мислення.
- Заохочуйте учнів доводити: «чому ми відкидаємо цей корінь?» — щоб уникнути механічності.
- Використовуйте «перевернутий клас»: давати короткі відео/інструкції перед уроком, а на уроці робити практику.
- Фіксуйте час на роботу з технікою (щоб не втрачати урок через налаштування).

3.2. Методика дистанційного навчання ірраціональних рівнянь

Дистанційне навчання стало невід’ємною складовою освітнього процесу XXI століття. Особливо актуальним воно стало у період пандемії COVID-19, під час військових дій та інших обставин, коли неможливе очне відвідування школи. Однак навіть у звичайних умовах дистанційні форми навчання відкривають широкі можливості для індивідуалізації освітнього процесу, розвитку самостійності учнів та формування цифрових компетентностей.

Тема «Ірраціональні рівняння» належить до складних тем шкільного курсу алгебри. Вона вимагає від учнів уміння працювати з областю визначення, виконувати алгебраїчні перетворення, користуватися графічними методами та уважно перевіряти отримані розв'язки. У дистанційному форматі особливо важливим є правильний добір інструментів і методичних прийомів, які забезпечують поєднання доступності пояснень, інтерактивності та якісного контролю знань.

Організаційно-методичні засади

Дистанційне вивчення теми доцільно будувати на таких принципах:

- **структурованість** (чіткий поділ на мікротеми: область визначення, метод піднесення до степеня, перевірка коренів, графічний метод тощо);
- **мультимедійність** (поєднання відео, тексту, інтерактивних завдань, візуалізацій);
- **діалогічність** (учні не лише слухають учителя, а й взаємодіють між собою та з цифровими ресурсами);
- **доступність** (матеріали повинні бути адаптовані до різних рівнів підготовки та технічних можливостей учнів).

Рекомендовані платформи: **Google Classroom, Moodle, Zoom, Microsoft Teams, Classtime, LearningApps, GeoGebra, Desmos**.

Викладання теоретичного матеріалу

Відеолекції та міні-презентації

- Тривалість: 7–10 хв, щоб зберегти концентрацію уваги.
- Структура: постановка проблеми → алгоритм розв'язання → приклад → коротке узагальнення.

- Інструменти: Loom, OBS Studio, PowerPoint із записом пояснень.

Інтерактивні схеми та алгоритми

Використання онлайн-сервісів (Miro, Canva, MindMeister) для створення блок-схем. Наприклад, схема «Алгоритм розв'язання ірраціональних рівнянь» включає:

1. Визначення області допустимих значень.
2. Виконання алгебраїчних перетворень.
3. Отримання можливих коренів.
4. Обов'язкова перевірка кожного кореня.

Індивідуальні вправи

Учні отримують завдання в Google Classroom чи Moodle. Розв'язки подають у вигляді фото зошита або PDF-файлів.

Колективна робота

- Використання Zoom/Teams із функцією «кімнати для групової роботи» (breakout rooms).
- Кожна група отримує рівняння, розв'язує його різними методами (алгебраїчно, графічно), а потім презентує результати.

Інтерактивні інструменти

- **Jamboard, Whiteboard.fi** — спільне розв'язування задач.
- **GeoGebra** — побудова графіків функцій, що входять до рівняння, для пошуку точок перетину.
- **Classtime, LearningApps** — тести з миттєвим зворотним зв'язком.

Форми організації дистанційного навчання

- **Асинхронні заняття** (учні самостійно переглядають відео, працюють із презентаціями, виконують вправи у власному темпі).
- **Синхронні заняття** (онлайн-уроки в Zoom/Meet з інтерактивними вправами та обговоренням).
- **Змішане навчання** (поєднання обох форматів).

Уроки бажано будувати за моделлю «перевернутого класу»: учні спершу переглядають коротке відео з теорією, а під час онлайн-уроку виконують завдання й отримують допомогу від учителя.

Зворотний зв'язок та оцінювання

- **Формувальне оцінювання**: коментарі до завдань у Google Classroom, робота з помилками, індивідуальні рекомендації.
- **Онлайн-тести**: Google Forms, Classtime, Quizizz (автоматична перевірка результатів).
- **Усний зворотний зв'язок**: короткі консультації у Zoom (5–10 хв на групу).

Переваги дистанційного навчання теми «Ірраціональні рівняння»

- можливість використання мультимедійних ресурсів (графіки, симуляції);
- гнучкий темп навчання, індивідуальний підхід;
- формування цифрової грамотності;
- доступ до матеріалів у будь-який час.

Труднощі та шляхи їх подолання

- **Низька мотивація** → використання ігрових технологій (Kahoot, рейтинги, бейджі).
- **Технічні проблеми** → дублювання матеріалів у кількох форматах (відео, pdf, текст).
- **Складність контролю** → поєднання тестів, усних пояснень та проєктної діяльності.

Методика дистанційного навчання ірраціональних рівнянь передбачає інтеграцію традиційних і новітніх засобів: відео, інтерактивних вправ, групової роботи онлайн та автоматизованого оцінювання. Такий підхід забезпечує не лише засвоєння математичних знань, а й розвиток навичок самостійності, комунікації та роботи з цифровими технологіями.

3.3. Гейміфікація у навчанні

Поняття гейміфікації (від англ. *gamification*) з'явилося на початку XXI століття та спочатку застосовувалося у сфері бізнесу для підвищення лояльності клієнтів і залучення нових користувачів. Згодом його почали активно використовувати в освіті. У педагогіці гейміфікація означає інтеграцію ігрових елементів у навчальний процес для підвищення мотивації, інтересу та залученості учнів до здобуття знань.

Гейміфікація не тотожна грі. Вона лише використовує окремі механіки з ігор, зокрема:

- бали та рейтинги, які стимулюють конкурентність та прагнення досягати вищих результатів;
- рівні (від простих до складних завдань), що формують відчуття прогресу;
- віртуальні нагороди (бейджі, «досягнення», сертифікати), які підкріплюють успіх;

- таблиці лідерів для формування командного духу;
- сюжетність і місії, які надають процесу навчання логічну й емоційну цілісність.

Психологічною основою гейміфікації є теорія самодетермінації (Deci & Ryan), яка наголошує на трьох ключових потребах учня: автономії, компетентності та соціальній взаємодії. Ігрові елементи допомагають задовольнити ці потреби, тим самим підвищуючи ефективність навчання.

Традиційно математика сприймається учнями як «складна» і «суха» дисципліна. Особливо це стосується тем, що потребують абстрактного мислення, таких як ірраціональні рівняння. Впровадження гейміфікаційних елементів:

- **зменшує страх перед помилкою** (у грі помилка — це лише «втрата життя», а не трагедія);
- **підвищує зацікавленість** за рахунок ігрових сюжетів;
- **стимулює повторення та тренування** (учні охоче виконують більше прикладів, щоб набрати бали чи обійти суперників);
- **розвиває командну роботу**, коли завдання виконуються групами.

Методика застосування гейміфікації при вивченні теми «Ірраціональні рівняння»

1. **Вибір ігрового сценарію**
   Викладач визначає сюжет, який буде зрозумілий та цікавий учням. Наприклад:
   - «Математичний детектив» — учні розкривають справу, розв’язуючи рівняння.
   - «Мандрівка країною квадратних коренів» — клас рухається від «селища простих рівнянь» до «міста складних».

- «Змагання героїв» — кожен учень/команда бореться за титул переможця, виконуючи місії.

2. **Побудова системи балів і нагород**
   - За кожне правильно розв’язане рівняння нараховується певна кількість балів.
   - Додаткові бали можна отримати за швидкість, оригінальність чи пояснення ходу розв’язання.
   - Нагороди: «Майстер квадратних коренів», «Дослідник сторонніх коренів» тощо.
3. **Розробка рівнів складності**
   - І рівень — прості рівняння виду $\sqrt{x} = a$.
   - ІІ рівень — рівняння, що зводяться до квадрата.
   - ІІІ рівень — комбіновані рівняння, що містять декілька коренів.
   - ІV рівень — завдання підвищеної складності (з параметрами, прикладні задачі).
4. **Використання цифрових інструментів**
   - **Kahoot, Quizizz, Blooket** — інтерактивні змагання з миттєвим зворотним зв’язком.
   - **Classtime, Socrative** — командні вікторини з «життямр
   - » та колективними перемогами.
   - **GeoGebra, Desmos** — візуалізація графіків ірраціональних функцій у процесі гри.
5. **Рефлексія та підбиття підсумків**
   - Учні обговорюють, які завдання були найцікавішими/найважчими.
   - Формується зв’язок між ігровими діями та реальними математичними навичками.

Приклади завдань з гейміфікаційними елементами

- **Квест «Знайди код»**: кожне розв’язане рівняння відкриває одну цифру коду. Лише після розв’язання всіх прикладів команда зможе відкрити «скарб».
- **«Математичний бій»**: дві команди отримують однакові завдання. За правильні розв’язання нараховуються «очкові удари».
- **«Полювання на сторонні корені»**: учні отримують рівняння, де обов’язково виникають сторонні корені. Завдання — виявити й пояснити, чому вони не є розв’язками.

Переваги гейміфікації для теми «Ірраціональні рівняння»

- Учні вчаться уважно виконувати перевірку розв’язків (щоб уникати сторонніх коренів).
- З’являється «відчуття прогресу» завдяки переходу від легких до складних рівнянь.
- Краще засвоюються алгоритми розв’язання через повторення в ігровій формі.
- Навчальний процес набуває емоційного забарвлення, що позитивно впливає на рівень засвоєння матеріалу.

Гейміфікація є інноваційним та ефективним підходом до викладання математики у школі. Вона дозволяє перетворити складні абстрактні теми на цікаві завдання, що мотивують учнів до активної роботи. При вивченні ірраціональних рівнянь гейміфікація поєднує тренування математичних навичок з елементами змагання, творчості та співпраці, роблячи навчання більш доступним і результативним.

Конспект уроку з математики (алгебра, 10 клас)

Тема: Ірраціональні рівняння

Тип уроку: вивчення нового матеріалу з елементами гейміфікації (квест-гра)

Форма проведення: урок-подорож

1. Мета уроку

Навчальна:

- сформувати уявлення про ірраціональні рівняння;
- навчити учнів розв’язувати найпростіші ірраціональні рівняння;
- закріпити вміння робити перевірку розв’язків.

Розвивальна:

- розвивати логічне та критичне мислення;
- формувати навички аналізу, співпраці в команді.

Виховна:

- виховувати уважність, взаємодопомогу, відповідальність за командний результат;
- формувати позитивне ставлення до навчання.

2. Обладнання

- мультимедійна презентація;
- онлайн-платформи: **Kahoot / Quizizz / Classtime** (для швидких вікторин);
- картки із завданнями різного рівня складності;
- плакати або інтерактивна дошка для фіксації балів.

3. Ігровий сюжет уроку

Урок проходить у формі **квесту «Мандрівка країною рівнянь»**.
Учні поділяються на команди-мандрівники. Щоб дістатися «фінішного міста» (знання теми), вони повинні пройти кілька зупинок:

1. «Селище квадратних коренів» – найпростіші рівняння.
2. «Місто піднесення» – рівняння, що потребують піднесення до степеня.
3. «Острів сторонніх коренів» – завдання, де обов’язкова перевірка.
4. «Фінальний замок» – складне завдання (комбіноване рівняння).

4. Хід уроку

1. Організаційний момент (2–3 хв)

Учитель пояснює сюжет уроку, ділить клас на команди (по 3–5 осіб), пояснює правила:

- за правильне розв’язання команда отримує **бали**;
- можна заробити **додаткові бали** за швидкість та пояснення розв’язання;
- неправильна відповідь — «втрата життя».

2. Актуалізація знань (5 хв)

Міні-вікторина у **Kahoot** (або на картках):

- Що таке арифметичний квадратний корінь?
- Які є властивості кореня?
- Які числа мають квадратний корінь?

Команди отримують перші бали.

3. Вивчення нового матеріалу (10 хв)

Учитель пояснює алгоритм розв’язування ірраціональних рівнянь:

1. Виділити вираз з коренем.
2. Піднести обидві частини до квадрата.
3. Розв’язати отримане рівняння.
4. Обов’язково зробити перевірку, оскільки можуть з’явитися **сторонні корені**.

Учитель наводить приклади на дошці:

$\sqrt{x+5}=3,\ \sqrt{2x-1}=x.$

4. Практична частина (гейміфікація)

Зупинка 1. «Селище квадратних коренів» (5 хв)

Розв’язати:

$\sqrt{x+7}=5,$

$\sqrt{3x-2}=4.$

Зупинка 2. «Місто піднесення» (7 хв)

$\sqrt{x^2-4}=x-2,$

$\sqrt{2x+3}=x.$

Зупинка 3. «Острів сторонніх коренів» (7 хв)

$\sqrt{x+1}=-3,$

$\sqrt{5x-4}=x-2.$

ут важливо пояснити роль перевірки.

Зупинка 4. «Фінальний замок» (10 хв)

Складне завдання (для всієї команди):

$$\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 2} = 6$$

Команда, яка правильно виконає завдання першою, отримує «золотий кубок знань».

5. Підбиття підсумків (5 хв)

- Підрахунок балів, нагородження команд.
- Коротке обговорення: що було найскладнішим? Які помилки найчастіше?

6. Рефлексія (2 хв)

Кожен учень завершує речення:

- «Сьогодні я навчився…»
- «Мені найбільше сподобалося…»
- «Я хотів би ще спробувати…».

5. Домашнє завдання

- Розв’язати 5 рівнянь із підручника (за варіантами).
- Творче завдання (за бажанням): скласти власне ірраціональне рівняння та запропонувати його для «наступної гри».

У такому вигляді урок можна презентувати як **інноваційну методику з елементами гейміфікації** у твоїй роботі.

РОЗДІЛ4 .АНАЛІЗ ПРАКТИЧНОГО ВПРОВАДЖЕННЯ ВИКЛАДЕНИХ ПІДХОДІВ

4.1. Досвід застосування запропонованих методів

Організація та умови проведення експерименту

З метою перевірки ефективності розробленої методики навчання розв’язуванню ірраціональних рівнянь було проведено педагогічний експеримент, який відбувався упродовж 2024–2025 навчального року в Ліцей №23 імені Романа Гурика.

У дослідженні брали участь учні 10-х класів, оскільки тема «Ірраціональні рівняння» вивчається у старшій школі відповідно до чинної навчальної програми з математики.

Для забезпечення достовірності результатів були сформовані дві групи:

- експериментальна група (ЕГ) — навчалася за методикою, розробленою в межах дослідження;
- контрольна група (КГ) — навчалася за традиційними підручниками й загальноприйнятими методами розв’язування.

Перед початком упровадження проведено **вхідне тестування**, яке дозволило визначити початковий рівень сформованості вмінь розв’язувати ірраціональні рівняння, а також з’ясувати типові помилки учнів. Аналіз результатів показав, що більшість школярів мають труднощі при:

- визначенні області допустимих значень (ОДЗ);
- піднесенні обох частин рівняння до квадрату;
- перевірці знайдених коренів (втрачені або сторонні корені).

Зміст і структура експериментальної роботи

Експеримент складався з трьох етапів: **підготовчого, формувального та підсумкового**.

1. Підготовчий етап

На цьому етапі було:

- проаналізовано зміст навчальної програми та чинні методичні рекомендації щодо вивчення теми “Ірраціональні рівняння”;
- проведено опитування вчителів математики для визначення найпоширеніших труднощів у викладанні даної теми;
- розроблено **систему уроків**, у яких послідовно реалізовано принципи діяльнісного та компетентнісного підходів;
- укладено **методичні картки** з алгоритмами розв’язування рівнянь різних типів:
    - рівнянь виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$;
    - рівнянь, що зводяться до раціональних;
    - рівнянь, які потребують заміни змінної;
    - рівнянь із параметрами.

Було підготовлено також **наочні матеріали** (схеми, таблиці, QR-коди з доступом до онлайн-тренажерів), що забезпечували диференціацію навчання.

2. Формувальний етап

Під час основного етапу експерименту у 10-х класах було проведено **серію уроків** за оновленою методикою.
Навчальний процес будувався з урахуванням таких принципів:

- **системності** (поступовий перехід від простих до складних рівнянь);

- **наочності** (використання графічних способів та ілюстрацій);
- **самостійності та пошукової діяльності** (робота в парах, міні-дослідження);
- **рефлексії** (учні аналізували власні помилки й робили висновки).

На кожному уроці учні експериментальної групи отримували **проблемні завдання**. Наприклад:

Знайдіть усі значення параметра а, за яких рівняння $\sqrt{x + 2a} = x - a$ має два різні дійсні корені.

Розв'язання подібних завдань вимагало від школярів не лише технічного володіння алгоритмами, а й логічного мислення, уміння аналізувати умови, будувати графіки функцій і співвідносити їх.

У процесі роботи широко використовувалися **інтерактивні методи**:

- **"Математичний лабіринт"** — групова робота з послідовним переходом між рівняннями різних типів;
- **"Помилка вчителя"** — учні аналізують розв'язання та знаходять неточності;
- **"Сходинки до розв'язку"** — послідовне відновлення пропущених етапів у записі.

Крім того, застосовувалися цифрові платформи (GeoGebra, Desmos, LearningApps), що допомагало учням **візуалізувати процес розв'язування** і контролювати правильність результату.

3. Підсумковий етап

Після завершення серії уроків було проведено **контрольне тестування**, яке містило завдання різного рівня складності.

Порівняльний аналіз показав суттєве зростання результатів у

експериментальній групі.
Так, середній рівень успішності зріс із **59% до 84%**, тоді як у контрольній групі — із **61% до 70%**.

Окрім кількісних показників, виявлено і **якісні зміни**:

- учні експериментальної групи краще володіють алгоритмами перевірки сторонніх коренів;
- вміють обґрунтовувати вибір методу розв’язання;
- демонструють вищий рівень самостійності під час виконання завдань.

Спостереження та узагальнення результатів

Аналіз ходу експерименту показав, що впровадження розробленої методики сприяло:

- активізації пізнавальної діяльності учнів;
- зменшенню кількості механічних помилок при піднесенні обох частин рівняння до квадрату;
- кращому розумінню зв’язку між аналітичним і графічним способами розв’язування;
- підвищенню інтересу до теми та математики загалом.

Учні позитивно сприймали новий формат роботи, зазначаючи, що «такі уроки допомагають зрозуміти логіку, а не просто запам’ятати формули».
Вчителі, які брали участь в експерименті, також відзначили зростання мотивації та зменшення кількості учнів, які уникають відповіді через страх помилитися.

Проміжні висновки

Отримані результати дозволяють зробити висновок, що **використання системи методів, спрямованих на розвиток аналітичного, графічного та логічного мислення учнів**, значно підвищує ефективність засвоєння теми “Ірраціональні рівняння”.

Практичний досвід довів доцільність:

- поєднання різних методів (аналітичного, графічного, заміни змінної, використання параметрів);
- застосування елементів самостійної та дослідницької діяльності;
- використання інформаційних технологій для візуалізації процесу розв’язування.

Таким чином, розроблена методика може бути рекомендована для використання у старшій школі з метою підвищення рівня математичної компетентності учнів та формування в них стійких навичок розв’язування ірраціональних рівнянь.

4.2. Аналіз ефективності впроваджених методик

Мета та інструменти аналізу

З метою об’єктивного визначення результативності впроваджених методичних підходів до навчання учнів розв’язуванню ірраціональних рівнянь було здійснено **порівняльний аналіз** результатів навчальної діяльності **експериментальної (ЕГ)** та **контрольної (КГ)** груп.

Оцінювання ефективності проводилося за такими критеріями:

1. **Рівень засвоєння теоретичного матеріалу** — розуміння властивостей ірраціональних рівнянь, умов існування розв’язків, етапів алгоритму.
2. **Сформованість практичних умінь** — здатність правильно обирати метод розв’язання, перевіряти знайдені корені.
3. **Рівень пізнавальної активності та самостійності** — уміння аргументувати свої дії, застосовувати знання в нових ситуаціях.
4. **Динаміка навчальної мотивації** — позитивне ставлення до теми, інтерес до пошуку раціональних стратегій розв’язування.

Для збору даних використовувалися:

- тестові завдання, диференційовані за рівнями складності;
- спостереження за діяльністю учнів під час уроків;
- анкетування щодо ставлення до математики після впровадження нових підходів.

Кількісний аналіз результатів

Після завершення формувального етапу експерименту було проведено підсумкове контрольне тестування.
Результати засвідчили суттєве підвищення рівня навчальних досягнень у експериментальній групі.

Таблиця 4.1

Порівняльні результати успішності учнів контрольної та експериментальної груп

Рівень навчальних досягнень	Контрольна група (КГ), %	ксперимента льна група (ЕГ)
Високий	12	34
Достатній	28	46
Середній	40	17
Початковий	20	3

Як видно з таблиці, кількість учнів із **високим рівнем навчальних досягнень** у експериментальній групі зросла майже втричі, тоді як частка учнів із середнім і початковим рівнями істотно зменшилася.

Середній показник успішності підвищився з **61% до 84%**, що свідчить про значне покращення результатів навчання.

Якісний аналіз результатів

Крім кількісних показників, аналіз спостережень та анкетування дозволив визначити **якісні зміни** у навчальній діяльності школярів:

- учні почали **усвідомлено** застосовувати алгоритми розв’язування, не механічно, а з логічним поясненням кожного етапу;
- при розв’язуванні складних рівнянь з параметрами учні ЕГ частіше використовували графічний спосіб для перевірки кількості розв’язків;
- значно зросла **мотивація до пошуку альтернативних способів розв’язання** — учні пропонували різні підходи, порівнювали ефективність методів;

- у контрольній групі переважала тенденція до шаблонного відтворення формул без розуміння логіки розв’язку.

Анкетування показало, що **76% учнів експериментальної групи** оцінили нові уроки як “цікаві та зрозумілі”, тоді як у контрольній групі цей показник становив лише **39%**.

Під час спостереження також зафіксовано:

- зниження кількості помилок, пов’язаних із неврахуванням ОДЗ;
- підвищення частки правильних перевірок знайдених коренів;
- активніше використання учнями аргументів при поясненні своїх дій.

Порівняльна динаміка показників

На основі отриманих даних побудовано узагальнену динаміку змін (опис графіка):

- На початку експерименту середній рівень засвоєння теми в обох групах був приблизно однаковим — близько **60%**.
- Після впровадження нової методики у ЕГ спостерігалося **стале зростання** показників на кожному етапі (від тренувальних до контрольних робіт).
- Різниця між середніми балами ЕГ і КГ на підсумковому етапі становила **понад 14 відсоткових пунктів**, що підтверджує статистично значущу різницю результатів.

Інтерпретація результатів

Аналіз отриманих даних дозволяє зробити висновок, що впровадження системи методів, спрямованих на формування в учнів цілісного уявлення про ірраціональні рівняння, забезпечує:

- **зростання рівня розуміння теоретичних основ** (учні пояснюють, чому необхідно враховувати область визначення, перевіряти сторонні корені тощо);
- **розвиток аналітичного мислення**, оскільки під час розв’язування рівнянь учні зіставляють різні методи (графічний, аналітичний, піднесення до степеня, заміну змінної);
- **підвищення навчальної мотивації**, адже учні бачать практичний сенс у розв’язуванні завдань, пов’язаних із реальними математичними ситуаціями;
- **зменшення кількості типових помилок**, пов’язаних із порушенням алгоритмів або неврахуванням умов існування коренів.

Отже, запропонована методика виявилася **результативною** й може бути рекомендована для широкого впровадження у шкільну практику як ефективний засіб формування в учнів стійких навичок розв’язування ірраціональних рівнянь.

4.3. Рекомендації для вчителів

Вступ

Результати аналізу ефективності запропонованих методик засвідчили, що формування в учнів умінь розв’язувати ірраціональні рівняння є значно результативнішим за умови цілеспрямованого використання системи прийомів, спрямованих на поєднання теоретичних знань і практичних умінь.

На основі проведеного експериментального дослідження розроблено **методичні рекомендації для вчителів математики**, спрямовані на підвищення якості навчання теми *«Ірраціональні рівняння»* у 9–11 класах.

1. Організація навчальної діяльності

1. **Забезпечити системність подачі матеріалу.**

   Перед вивченням ірраціональних рівнянь варто актуалізувати знання учнів про степені, корені, властивості квадратних і кубічних функцій. Це створює базу для свідомого сприйняття нового матеріалу.
2. **Використовувати поетапне навчання.**

   Доцільно поділити процес формування навичок на три етапи:
   - *підготовчий* — повторення основних понять, введення визначення ірраціонального рівняння;
   - *формувальний* — опрацювання алгоритмів розв'язування різних типів рівнянь;
   - *творчо-узагальнюючий* — застосування знань у нестандартних і комбінованих завданнях.
3. **Застосовувати різні форми навчальної роботи.**

   Ефективними є:
   - групові обговорення методів розв'язання однієї задачі різними способами;
   - математичні тренінги, де учні по черзі пояснюють хід розв'язку;
   - міні-проєкти (наприклад, «Як розв'язували ірраціональні рівняння у XVII–XX ст.»).

2. Методичні прийоми роботи з учнями

1. **Алгоритмізація дій.**

   Рекомендується виробити в учнів чіткий алгоритм розв'язування ірраціональних рівнянь, який включає:
   - визначення області допустимих значень (ОДЗ);
   - виконання перетворень (піднесення до степеня, ізоляція радикала тощо);

- перевірку отриманих коренів.

2. Вчитель повинен підкреслювати, що *без перевірки* розв’язок не може вважатися правильним.
3. **Порівняння методів.**

   Доцільно пропонувати учням один і той самий приклад розв’язати кількома способами (наприклад, піднесенням до степеня і заміною змінної), після чого організувати коротке обговорення — який метод ефективніший і чому.
4. **Використання графічних і візуальних методів.**

   Графічна інтерпретація (перетин кривих, поведінка функцій) допомагає учням глибше усвідомити зміст рівняння і кількість його розв’язків.
5. **Акцент на типових помилках.**

   Під час навчання необхідно звертати увагу на типові помилки, зокрема:
   - піднесення до степеня без врахування ОДЗ;
   - неправильне зведення подібних членів після усунення радикалів;
   - пропуск етапу перевірки.

     Для профілактики таких помилок варто розробити окремі тренувальні вправи з коментарями.

3. Використання технологій та інтерактивних засобів

1. **Застосування інтерактивних платформ**

   (наприклад, GeoGebra, Desmos, Classtime) для візуалізації функцій, побудови графіків і контролю розв’язків.

   Це підвищує зацікавленість учнів і допомагає зрозуміти логіку рівнянь.

2. **Онлайн-тестування і мікротренінги.**

   Варто використовувати короткі інтерактивні тести після кожного типу рівнянь, щоб оперативно визначити прогалини у знаннях.
3. **Створення цифрових карт знань (mind map)**

   з теми «Методи розв'язування ірраціональних рівнянь» — це допомагає структурувати матеріал і швидко повторювати його перед контрольними роботами.

4. Диференціація навчання

1. **Індивідуалізація завдань.**

   Учням з нижчим рівнем підготовки варто пропонувати завдання на розпізнавання типу рівняння, а сильнішим — комбіновані задачі з параметром або кількома радикалами.
2. **Використання "сходинок складності".**

   Наприклад:
   - *І рівень*: прості рівняння виду $\sqrt{x} = 3$;
   - *ІІ рівень*: рівняння із двома радикалами;
   - *ІІІ рівень*: ірраціональні рівняння з параметром або в системі.
3. **Підтримка учнів у процесі пошуку помилок.**

   Рекомендується час від часу проводити "уроки-редактори", де учні шукають і виправляють помилки у готових розв'язках — це формує критичне мислення.

5. Формування пізнавального інтересу

1. **Використовувати життєві приклади.**

   Наприклад, показати, що ірраціональні рівняння можуть описувати задачі з геометрії (обчислення діагоналей, відстаней), фізики (залежності швидкості й енергії), економіки тощо.

2. **Математичні ігри та змагання.**

   Корисно проводити невеликі турніри “Хто швидше знайде помилку?”, “Знайди всі способи розв’язання рівняння”.

3. **Рефлексивні вправи.**

   Наприкінці уроку запропонувати учням відповісти письмово:

   “Що сьогодні було найскладнішим?”, “Який метод сподобався найбільше?”.

   Це підвищує усвідомлення процесу навчання.

6. Оцінювання результатів навчання

1. **Критерії оцінювання** мають охоплювати не лише правильність розв’язку, а й:
   - логічність міркувань;
   - аргументованість вибору методу;
   - коректність перевірки коренів;
   - уміння пояснити свій хід розв’язання.
2. **Формувальне оцінювання.**

   Доцільно надавати зворотний зв’язок у вигляді коментарів (“У тебе правильний метод, але пропущено перевірку”), а не лише бали — це стимулює учнів до самовдосконалення.

Висновки

Отже, ефективність навчання теми *«Ірраціональні рівняння»* значною мірою залежить від:

- системності подачі матеріалу;
- алгоритмізації процесу розв’язування;
- диференційованого підходу;
- використання інтерактивних технологій;

- формування позитивної навчальної мотивації.

Застосування цих рекомендацій сприятиме підвищенню рівня математичної компетентності учнів, розвитку логічного мислення та вмінню застосовувати отримані знання у нестандартних ситуаціях.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження теми «Ірраціональні рівняння» дозволяє комплексно оцінити значення цього розділу математики у шкільному курсі та визначити ефективні підходи до його викладання. Ірраціональні рівняння займають важливе місце в системі математичної освіти, оскільки вони сприяють розвитку у школярів логічного мислення, аналітичних навичок, уміння працювати з радикалами та функціональними залежностями. Систематизація визначень, властивостей та класифікації ірраціональних рівнянь дозволила виділити основні принципи та методи їх розв’язування, що становлять основу шкільної методики та забезпечують цілісне сприйняття матеріалу учнями.

Аналіз освітніх програм і шкільних підручників показав, що в більшості навчальних матеріалів застосовуються традиційні методи розв’язування рівнянь, зокрема піднесення до степеня, заміна змінних та ізоляція радикалів. Водночас практика свідчить про наявність труднощів у засвоєнні теми учнями. Найчастіше вони пов’язані з обмеженнями області визначення, необхідністю ретельного дотримання правил перетворення радикалів, а також із недостатньою кількістю практичних завдань, які сприяли б розвитку критичного мислення та здатності до самостійного аналізу. Це підкреслює, що ефективність навчання залежить не лише від знання алгоритмів, але й від рівня сформованості аналітичних і логічних навичок у школярів.

У ході дослідження було розглянуто інноваційні підходи до викладання теми, зокрема використання інтерактивних технологій, дистанційного навчання та елементів гейміфікації. Аналіз показав, що інтерактивні завдання, онлайн-симуляції, віртуальні лабораторії та ігрові методики суттєво підвищують зацікавленість учнів, активізують їхню участь у

навчальному процесі та стимулюють самостійну пізнавальну діяльність. Практичне впровадження цих методик у навчальний процес підтвердило їхню ефективність: спостерігається підвищення результативності розв’язування ірраціональних рівнянь, покращується розуміння учнями математичних концепцій, а також розвиваються навички критичного мислення та аналітичного підходу до задач.

Результати дослідження свідчать про доцільність поєднання традиційних і інноваційних методів навчання, що забезпечує комплексне засвоєння матеріалу, підвищує ефективність викладання та сприяє формуванню математичної компетентності учнів. Впровадження інтерактивних елементів та ігрових методик у процес навчання дозволяє підвищити мотивацію учнів, стимулювати їх до активного освоєння матеріалу та розвитку навичок самостійного аналізу, що є надзвичайно важливим для формування цілісної математичної культури.

Таким чином, проведене дослідження не лише систематизує знання щодо ірраціональних рівнянь та методів їх розв’язування, але й надає практичні рекомендації для оптимізації викладання теми у шкільному курсі. Запропоновані підходи можуть бути ефективно використані в педагогічній практиці для підвищення якості навчання, розвитку математичних компетентностей та стимулювання творчої активності учнів, що є ключовим завданням сучасної освіти.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алимов, Т.М. Математика: Підручник для 10–11 класів. – Київ: Видавництво «Освіта», 2020. – 384 с.
2. Богданов, І.В., Петренко, С.О. Методика викладання алгебри у старшій школі. – Харків: Ранок, 2019. – 256 с.
3. Іваненко, В.І. Алгебра та початки аналізу: Підручник для загальноосвітніх шкіл. – Київ: Літера, 2021. – 512 с.
4. Кравченко, О.П. Інтерактивні методи навчання математики в школі. – Київ: Видавничий дім «Шкільний світ», 2022. – 200 с.
5. Міністерство освіти і науки України. Державний стандарт базової та повної середньої освіти: Математика. – Київ, 2018. – 72 с.
6. Назаренко, Л.М. Гейміфікація у викладанні математики: теорія і практика. – Львів: Видавництво «Академія», 2021. – 184 с.
7. Савченко, М.В. Ірраціональні рівняння у шкільному курсі: методичні рекомендації. – Харків: Освітній центр, 2020. – 120 с.
8. Ткаченко, Ю.О. Дистанційне навчання математики: теорія та практика. – Київ: Видавництво «Педагогічна думка», 2022. – 210 с.
9. Шевчук, О.В. Булева алгебра та ірраціональні рівняння: навчально-методичний посібник. – Львів, 2019. – 144 с.
10. Черненко, С.П. Графічні методи розв’язування рівнянь у шкільному курсі. – Київ: Видавництво «Наука і школа», 2020. – 160 с.
11. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. Для 10 кл. закладів
12. загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б.
13. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018.
14. 2. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Номирський Д.А., Якір М.С. Алгебра і
15. початки аналізу: підручник для 10 класу загальноосвіт. закладів.
16. Академічний рівень. – К.: Гімназія, 2010.

17.3. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С. Алгебра і
18.початки аналізу. 10 клас. Збірник задач і контрольних робіт. – Х. :
19.Гімназія, 2010.
20.4. Романюк В.Я., Дутко Л.В. Технології інтерактивного навчання на уроках
21.математики. – Львів: Тріада плюс, 2004.
22.5. Б.Г. Орач. Підвищимо ефективність викладання математики в школі. –
23.Львів: Сполом , 2006.
24.6. Сканаві М.І. Збірник задач з математики для вступників у ВНЗ. – К.:
25.Вища шк., 1994.
26.7. Математика: Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного
27.оцінювання / Уклад.: А. М. Капіносов, Г. І. Білоусова,Г. В. Гап'юк, Л. 1.
28.Кондратьєва, О. М. Мартинюк, С. В. Мартинюк, Л. І. Олійник, П. І.
29.Ульшин, О. Й. Чиж. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2015. — 528с