Карпатський національний університет імені Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та інформатики і методики навчання

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему: «Особливості вивчення рівнянь та нерівностей з параметрами в профільній школі»

Виконала:

магістрантка групи СОМ(М)-2

Спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Гошовська Ю.М.

(прізвище та ім'я здобувача освіти)

Керівник: Никифорчин І. В.

(прізвище та ім'я)

Рецензент: _____

(прізвище та ім'я)

Івано-Франківськ – 2025 р.

ЗМІСТ

ВСТУП 3

РОЗДІЛ 1 ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ 6

1.1. Методичні підходи до навчання рівнянь та нерівностей 6

1.2. Аналіз навчальних програм та підручників 8

РОЗДІЛ 2 ТИПИ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРОМ 11

2.1. Квадратні рівняння та нерівності з параметрами 11

2.2. Ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами 17

2.2.1. Ірраціональні рівняння з параметром 17

2.2.2. Ірраціональні нерівності з параметром 19

2.3. Показникові рівняння та нерівності з параметрами 21

2.4. Логарифмічні рівняння та нерівності з параметрами 28

РОЗДІЛ 3 ВИКОРИСТАННЯ ІКТ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРАМИ 36

ВИСНОВОК 44

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 46

ВСТУП

У сьогоднішніх умовах реформування освіти зростають вимоги до рівня математичної підготовки випускників профільної школи. Серед різних тем, що вивчаються в курсі алгебри, важливе місце займають рівняння та нерівності з параметрами. Саме ці завдання найбільш яскраво демонструють необхідність володіння учнями аналітичним мисленням, умінням працювати зі змінними умовами та здійснювати аналіз залежностей між параметрами та розв'язками.

Сучасні освітні реалії, сформовані під впливом ідей Нової української школи (НУШ), активного впровадження STEM/STEAM-освіти та цифровізації навчального процесу, вимагають якісно нового підходу до організації навчання, особливо в таких складних і водночас значущих темах, як рівняння й нерівності з параметрами.

Актуальність обраної теми зумовлена тим, що задачі з параметрами викликають значні труднощі у процесі опанування матеріалу. Це пов'язано як із підвищеним рівнем абстрактного мислення, що необхідний для їх розв'язання, так із потребою поєднювати знання з різних розділів. Більше того, подібні завдання займають вагоме місце у програмах НМТ, а також на етапах проведення олімпіад та вступних випробувань. Відповідно, від здобувачів освіти очікується не просто механічне використання формул, а глибоке розуміння математичних операцій. З цієї причини особливо актуальною є потреба у вдосконаленні методики вивчення рівнянь та нерівностей із параметрами, а також у створенні дієвих інструментів, які забезпечать якісне засвоєння даної теми учнями профільних класів.

Мета дослідження полягає в обґрунтуванні, розробці та апробації методичних засад ефективного вивчення рівнянь і нерівностей із параметрами у профільній школі, а також у створенні комплексу завдань і вправ, спрямованих на розвиток аналітичного мислення учнів.

Для досягнення поставленої мети визначені такі **завдання**:

- здійснити критичний аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми навчання розв'язування рівнянь і нерівностей із параметрами;
- дослідити методичні підходи до викладання рівнянь і нерівностей з параметрами;
- виявити основні труднощі, з якими стикаються учні під час розв'язування рівнянь і нерівностей із параметрами;
- розробити та апробувати комплекс методичних рекомендацій і завдань для ефективної організації навчального процесу.

Об’єктом дослідження є процес навчання алгебри в профільній школі.

Предмет дослідження — методичні особливості вивчення рівнянь і нерівностей із параметрами старшокласниками.

Основна гіпотеза дослідження полягає в припущенні, що використання системи спеціально розроблених методичних прийомів і завдань для вивчення рівнянь та нерівностей із параметрами значно підвищить рівень розуміння учнями математичних понять, сприятиме розвитку їх логічного мислення і покращить навчальні досягнення.

У ході роботи були використані теоретичні та емпіричні методи:

- аналіз наукової, психолого-педагогічної та методичної літератури;
- порівняльний аналіз чинних програм і підручників з математики;
- педагогічне спостереження за навчальним процесом;
- аналіз результатів виконання навчальних завдань;
- моделювання та розробка методичних прийомів;
- педагогічний експеримент.

Наукова новизна дослідження полягає у теоретичному обґрунтуванні та практичній реалізації підходу до вивчення рівнянь і нерівностей із параметрами, що пов’язане з можливостями інтерактивного цифрового середовища.

У рамках роботи удосконалено окремі аспекти методики навчання теми завдяки впровадженню динамічних графічних моделей програмного засобу

GeoGebra, що розширюють можливості якісного аналізу параметричних задач. Це дозволило доповнити існуючі підходи новими видами завдань, спрямованих на розвиток в учнів уміння самостійно досліджувати властивості функцій.

Крім того, уточнено та конкретизовано умови ефективного застосування цифрових інструментів на уроках алгебри профільної школи, що сприяє подальшому розвитку методичних рекомендацій щодо організації діяльності учнів у середовищі GeoGebra.

Практичне значення результатів роботи визначається можливістю їх безпосереднього застосування в освітньому процесі профільних класів. Запропонована система методичних прийомів та завдань дозволяє ефективно організовувати навчальний процес, орієнтуючись на індивідуальні освітні потреби учнів, сприяє формуванню навичок самостійної роботи, критичного мислення та готовності до розв’язання нестандартних задач. Крім того, розроблені матеріали можуть бути використані для підготовки учнів до участі в математичних змаганнях.

Основні положення та результати дослідження були апробовані під час участі в університетській науковій конференції, де було представлено тези на тему «Використання ІКТ для розв’язування рівнянь та нерівностей з параметрами». Тези доповіді опубліковані у збірнику матеріалів конференції і містять ключові результати дослідження та підтверджують практичну реалізацію отриманих напрацювань.

Структура і обсяг роботи. Магістерська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. У першому розділі подано теоретичні основи та методичні підходи до вивчення рівнянь і нерівностей у профільній школі. Другий розділ присвячений аналізу основних типів рівнянь і нерівностей з параметрами та методиці їх розв’язування. У третьому розділі розглянуто можливості застосування ІКТ, зокрема GeoGebra, для підвищення ефективності навчання цієї теми. Загальний обсяг роботи становить 50 сторінок разом із таблицями, рисунками та додатками.

РОЗДІЛ 1 ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

1.1. Методичні підходи до навчання рівнянь та нерівностей

Вивчення рівнянь та нерівностей у шкільному курсі алгебри є одним із основоположних етапів формування математичної компетентності учнів. Від того, наскільки якісно учні опанують прийоми розв'язування рівнянь і нерівностей, залежить їхня здатність до подальшого вивчення алгебри, математичного аналізу та суміжних дисциплін.

Методика навчання розв'язування рівнянь та нерівностей базується на низці дидактичних принципів, серед яких чільне місце посідають: систематичність і послідовність, науковість, доступність, свідомість і активність учнів, а також зв'язок навчання з практикою.

Серед основних методичних підходів до навчання розв'язування рівнянь і нерівностей виділяють:

- **Аналітичний**, що передбачає розгляд властивостей функцій і числових множин для обґрунтування способу розв'язання.
- **Графічний**, який передбачає використання графіків функцій для візуалізації розв'язків.
- **Алгоритмічний**, орієнтований на побудову чітких послідовностей дій під час розв'язування стандартних типів задач.
- **Проблемно-пошуковий**, який спрямований на розвиток навичок самостійного аналізу задачі й пошуку шляхів розв'язання.
- **Моделюючий**, коли реальні або уявні ситуації моделюються рівняннями або нерівностями.

Одним із ключових понять, без яких неможливе ефективне навчання розв'язування рівнянь та нерівностей, є поняття рівносильних перетворень.

Рівносильні перетворення — це такі перетворення рівнянь або нерівностей, які не змінюють множину їхніх розв'язків.

Вивчення рівносильних перетворень має бути одним із ключових елементів методики навчання, адже саме їх коректне застосування гарантує правильність розв’язання задач і допомагає уникнути поширених помилок.

До рівносильних перетворень відносяться:

- додавання або віднімання одного й того самого виразу в обох частинах рівняння;
- множення чи ділення обох частин рівняння на одне й те саме ненульове число;
- піднесення обох частин рівняння до однакового степеня (за умови відповідних обмежень);
- заміна виразів рівними їм виразами.

Під час розв’язування нерівностей необхідно враховувати специфіку рівносильних перетворень:

- якщо множити або ділити обидві частини нерівності на додатне число, знак нерівності зберігається;
- якщо множити або ділити обидві частини нерівності на від’ємне число, знак нерівності змінюється на протилежний.

У методичній практиці важливо акцентувати увагу учнів на умовах, за яких можна застосовувати рівносильні перетворення, а також розглядати приклади неправильного їх використання та наслідки таких помилок.

Для формування стійких навичок доцільно організовувати роботу в таких напрямках:

- пояснювати суть рівносильних перетворень на елементарних прикладах;
- поступово переходити до складніших випадків, ускладнюючи структуру рівнянь і нерівностей;
- вчити визначати припустимі та неприпустимі перетворення;
- аналізувати задачі з погляду збереження множини розв’язків на кожному етапі розв’язання.

Особливо важливо зосередити увагу на понятті області допустимих значень (ОДЗ).

ОДЗ — це множина всіх значень змінної, за яких математичний вираз, рівняння або нерівність має зміст і є визначеним.

Інакше кажучи, це всі значення змінної, які не порушують математичних правил, таких як:

- не можна ділити на нуль;
- не можна брати парний корінь із від’ємного числа;
- логарифм існує лише для додатних чисел тощо.

Формування в учнів уміння визначати ОДЗ є ключем до правильного розв’язання та запобігання типовим помилка.

Таким чином, у процесі навчання учнів розв'язуванню рівнянь і нерівностей доцільно:

- навчити розрізняти рівносильні та нерівносильні перетворення;
- формувати розуміння умов, за яких ці перетворення можна застосовувати;
- розвивати навички аналізу отриманих результатів на відповідність початковій умові задачі.

Застосування методичних підходів, що базуються на усвідомленому використанні рівносильних перетворень, сприяє підвищенню математичної культури учнів, розвитку логічного мислення, уважності та самостійності під час розв’язування математичних задач.

1.2. Аналіз навчальних програм та підручників

Одним із ключових аспектів вивчення рівнянь і нерівностей з параметрами в профільній школі є аналіз змістового наповнення чинних навчальних програм і підручників. Ефективність засвоєння матеріалу значною мірою визначається тим, наскільки логічно вибудувано навчальний зміст, чи відповідає він віковим особливостям учнів та чи забезпечує поступовий перехід до складніших понять.

Навчання математики у старших класах в Україні здійснюється відповідно до програми для 10–11 класів (рівень стандарту та профільний рівень), затвердженої наказом МОН України № 804 від 20.07.2016 року та оновленої у 2017 і 2019 роках. У цій програмі приділяється окрема увага роботі з рівняннями й нерівностями, у тому числі з параметрами, особливо в класах математичного профілю. Учням пропонується не лише знаходити розв’язок, а й досліджувати умови існування розв’язків і залежність їх кількості від значення параметра.

Вивчення програмних вимог дає підстави стверджувати, що для успішного опанування теми учні повинні володіти такими вміннями:

- визначати область допустимих значень параметра;
- коректно застосовувати рівносильні перетворення для спрощення виразів;
- аналізувати, як змінюється кількість розв’язків залежно від параметра;
- користуватися графічними методами дослідження.

Для з’ясування того, як програмні вимоги реалізуються на практиці, було проведено аналіз змісту найбільш поширених у шкільній практиці підручників для 10–11 класів:

1. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика: підручник для 10 класу (профільний рівень). — Харків: Гімназія, 2018.
2. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: підручник для 11 класу (профільний рівень). — Київ: Генеза, 2019.
3. Яворський Г. М., Бродський Я. С. Алгебра і початки аналізу. 10–11 класи. — Львів: Світ, 2017.

Аналіз показав низку недоліків у подачі матеріалу, серед яких:

- невелика кількість задач дослідницького характеру, що потребують пошуку та обґрунтування;
- обмежена кількість прикладів, де використано методи дослідження функцій для задач із параметрами;

- недостатня увага до формування навичок відрізняти рівносильні перетворення від нерівносильних.

У деяких підручниках ці недоліки частково компенсуються завданнями у рубриках «Дослідницькі задачі» або «Задачі підвищеної складності». Проте їх кількість усе ще недостатня для системного формування в учнів уміння самостійно досліджувати рівняння та нерівності з параметрами.

Узагальнюючи результати аналізу навчальних програм і підручників, можна дійти висновку, що, попри формальне включення теми рівнянь і нерівностей із параметрами до змісту програми, методичне наповнення цієї теми потребує вдосконалення. Важливо забезпечити більш повне й різнопланове методичне наповнення цієї теми — з урахуванням сучасних освітніх вимог, психолого-педагогічних особливостей старшокласників та принципів розвитку логічного мислення.

Отже, підвищення якості навчання цієї теми можливе за умов:

- збільшення кількості задач дослідницького характеру;
- ширшого застосування різних методів розв’язання;
- посилення акценту на аналіз ОДЗ та правильного використання рівносильних перетворень;
- розроблення системи вправ, спрямованих на опанування роботи з параметрами на різних рівнях складності.

Урахування цих рекомендацій сприятиме тому, щоб вивчення рівнянь і нерівностей із параметрами у профільній школі стало більш цікавим, ефективним і результативним для учнів профільної школи.

РОЗДІЛ 2 ТИПИ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРОМ

2.1. Квадратні рівняння та нерівності з параметрами

2.1.1. Квадратні рівняння з параметром

Квадратні рівняння посідають важливе місце у курсі алгебри профільної школи , а їх дослідження стає особливо значущим тоді, коли в умові присутній ***параметр*** — величина, значення якої може змінюватися і впливати на кількість, характер та властивості коренів.

Загальне ***квадратне рівняння з параметром*** можна записати у вигляді:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

де x – змінна, a, b, c – параметри, причому $a \neq 0$.

Під час дослідження рівнянь такого типу виділяють основні завдання:

- визначити умови на параметр, за яких рівняння має розв’язки;
- встановити кількість та вид коренів залежно від параметра;
- проаналізувати залежність коренів від зміни параметра;
- знайти ті значення параметра, за яких розв’язки додатково задовольняють певні вимоги (наприклад, належать заданому проміжку).

Універсального способу розв’язування рівнянь із параметрами не існує, тому найчастіше користуються аналітичними підходами, що ґрунтуються на формулах та властивостях функцій, а також графічними методами. [1]

Основним засобом дослідження квадратних рівнянь та нерівностей з параметром є дискримінант (Рис. 2.1).

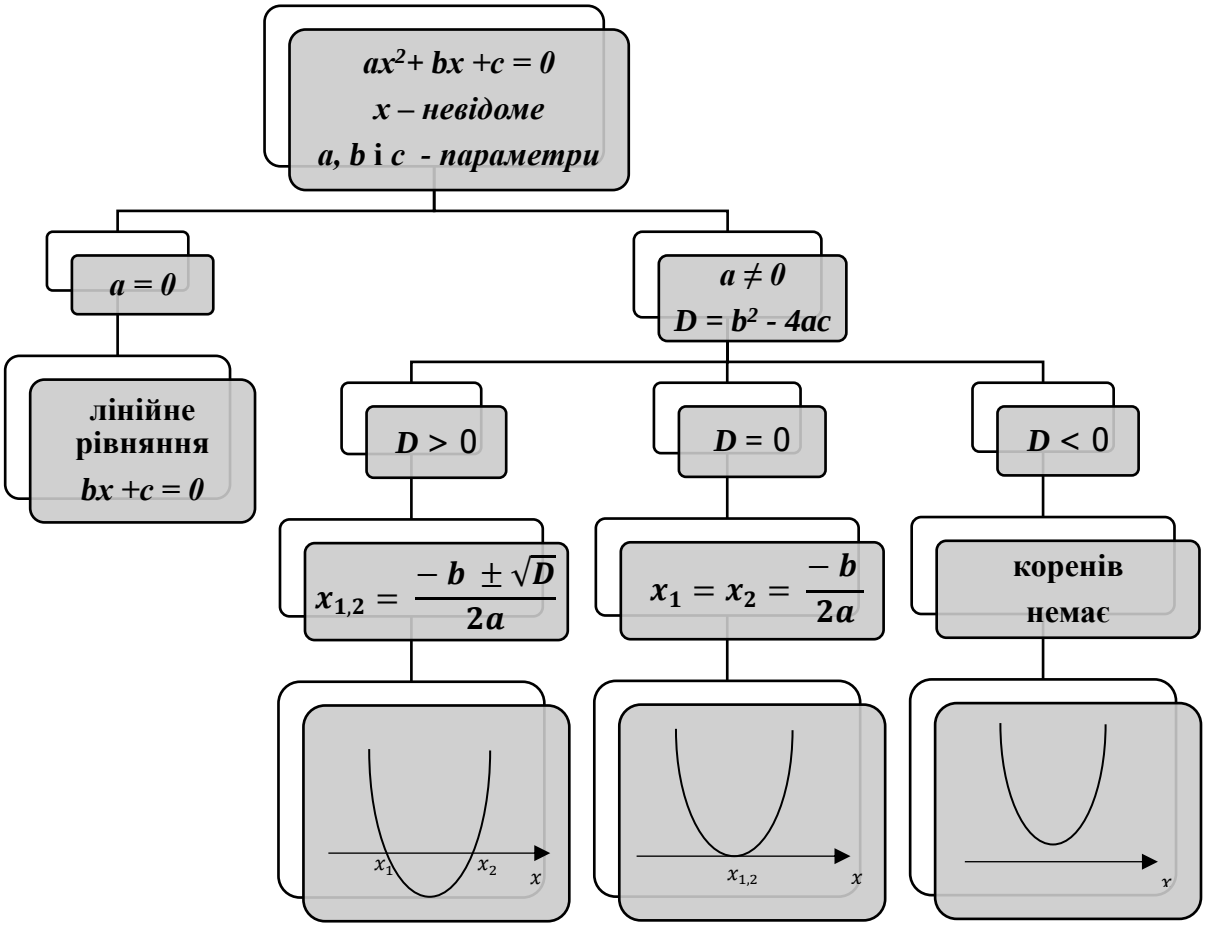


Рис. 2.1. Схема алгоритму розв'язання квадратичних рівнянь з параметром за допомогою дискримінанта.

Приклад 2.1. Розв'язати рівняння $ax^2 - 24x - 25 = 0$.

Розв'язання:

Якщо $a = 0$*, то отримуємо лінійне рівняння виду:*

$-24x - 25 = 0$

Звідси $x = -\frac{25}{24}$.

Якщо $a \neq 0$*, розв'язуємо квадратне рівняння, використовуючи формулу дискримінанта:*

$D = (-24)^2 - 4 \cdot a \cdot (-25) = 576 + 100a$

Розглянемо різні випадки дискримінанта:

I. $D < 0$

$576 + 100a < 0$

$a < -\frac{576}{100}$

При $a \in (-\infty; -5{,}76)$ рівняння розв′язків немає $\emptyset$.

II. $D = 0$

$576 + 100a = 0$

$a = -\frac{576}{100}$

При $a = -5{,}76$ рівняння має тільки один корінь:

$x = \frac{24 - 0}{2} = \frac{24}{2} = 12$

III. $D > 0$

$576 + 100a > 0$

$a > -\frac{576}{100}$

При $a \in (-5{,}76;\ +\infty)$ рівняння має два корені:

$x_1 = \frac{24 - \sqrt{576 + 100a}}{2} = \frac{2(12 - \sqrt{144 + 25a})}{2} = 12 - \sqrt{144 + 25a}$

$x_2 = \frac{24 + \sqrt{576 + 100a}}{2} = 12 + \sqrt{144 + 25a}$

Відповідь: ***1.*** При $a \in (-\infty; -5{,}76)$ рівняння розв′язків немає $\emptyset$.

2. При $a = -5{,}76$ рівняння має тільки один корінь: $x = 12$.

3. При $a \in (-5{,}76;\ +\infty)$ рівняння має два корені:

$x_1 = 12 - \sqrt{144 + 25a}$

$x_2 = 12 + \sqrt{144 + 25a}$

4. При $a = 0$ $x = -\frac{25}{24}$.

В теорії квадратних тричленів особливу роль також відіграє теорема Вієта та обернена до неї. Сформулюємо їх.

Теорема Вієта. Якщо x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Приклад 2.2. Знайти значення параметра a, за яких сума квадратів коренів даного рівняння $x^2 + 2ax - 3 = 0$ найменша.

Розв'язання:

$x^2 + 2ax - 3 = 0$

Для того, щоб рівняння мало 2 корені, потрібно щоб $D \geq 0$. *Перевіримо:*

$D = (2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4a^2 + 12 \geq 0$ – виконується $\forall a$.

За теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2a & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = -3 & (2) \end{cases}$$

За умовою, знайдемо:

$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

Підставимо відповідні значення із рівнянь (1), (2) теореми Вієта:

$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (-2a)^2 - 2 \cdot (-3)$

$x_1{}^2 + x_2{}^2 = 4a^2 + 6$

Вираз $4a^2 + 6$ набуває найменшого значення, коли $a = 0$.

Відповідь: При $\boldsymbol{a = 0}$ сума квадратів коренів рівняння найменша.

2.1.2. Квадратні нерівності з параметром

Нерівність, у лівій частині якої стоїть квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ (де $a \neq 0$; $a, b,$ c – параметри), а в правій – нуль, називають ***квадратною***.

Розв'язати квадратну нерівність з параметром означає знайти всі її розв'язки або довести їх відсутність залежно від значення параметра a.

Множину розв'язків такої нерівності можна досить просто визначити, побудувавши схематичний графік функції $ax^2 + bx + c$.

Алгоритм розв'язування квадратних нерівностей:

1. З'ясувати як напрямлені вітки параболи (графіка квадратичної функції) $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$;
2. Знайти корені відповідного квадратного рівняння $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$;
3. Побудувати ескіз графіка функції $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$;
4. Вибрати ті значення змінної, які задовольняють задану нерівність;
5. Записати відповідь.

Приклад 2.3. Знайдіть всі дійсні значення $\boldsymbol{a}$, для яких нерівність $\boldsymbol{ax^2 + 8x - a + 10 > 0}$ справджується для всіх дійсних чисел.

Розв'язання:

$ax^2 + 8x - a + 10 > 0$

Для того, щоб виконувалася дана умова для всіх дійсних чисел, потрібно, щоб парабола не дотикалася до осі абсцис і вітки були напрямлені вгору.

Запишемо необхідні умови у систему (1):

$$\begin{cases} D < 0 \\ a > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Обчислюємо дискримінант:

$D = 64 - 4 \cdot a \cdot (-a + 10) = 64 + 4a^2 - 40a$

Знаходимо корені, при яких дискримінант є від'ємним:

$4a^2 - 40a + 64 < 0 \quad |:4$

$a^2 - 10a + 16 < 0$

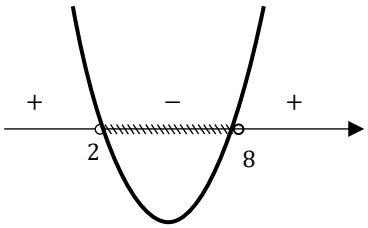
Скористаємось теоремою Вієта:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 10 \\ a_1 \cdot a_2 = 16 \end{cases}$$

$a_1 = 2$

$a_2 = 8$

$(a - 2)(a - 8) < 0$



$a \in (2;\ 8)$

$\begin{cases} a \in (2;\ 8) \\ a > 0 \end{cases}$

***Відповідь*: $\boldsymbol{a \in (2;\ 8)}$**

Приклад 2.4. Знайдіть всі дійсні значення a, для яких нерівність $ax^2 + 5ax + 4a + 3 < 0$ не має розв'язків.

Розв'язання:

$ax^2 + 5ax + 4a + 3 < 0$

Оскільки коефіцієнт при x^2 містить параметр, то розглянемо 2 випадки:

I. *Нехай $a = 0$, тоді нерівність набуде вигляду:*

$0 \cdot x^2 + 5 \cdot 0 \cdot x + 4 \cdot 0 + 3 < 0$

Для будь-яких значень x ця нерівність не виконується: $3 \not< 0$.

Тому якщо $a = 0$, то дане рівняння розв'язків не має.

II. *Нехай $a \neq 0$, тоді маємо квадратну нерівність. Вона не має розв'язків тоді, коли $D < 0$.*

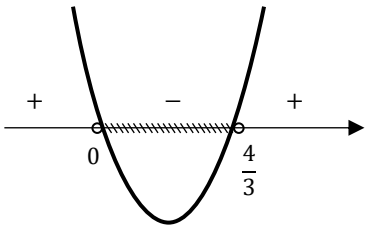
Обчислюємо дискримінант:

$D = 25a^2 - 4 \cdot a \cdot (4a + 3) = 25a^2 - 16a^2 - 12a = 9a^2 - 12a$

Знаходимо корені, при яких дискримінант є від'ємним:

$9a^2 - 12a < 0$

$3a(3a - 4) < 0$



$a \in \left(0;\ \frac{4}{3}\right)$

***Відповідь*:** $a \in \left(0;\ \frac{4}{3}\right)$.

2.2. Ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами

2.2.1. Ірраціональні рівняння з параметром

Ірраціональним рівнянням зі змінною x *та параметром* a називають рівняння, у якому змінна міститься під знаком кореня.

Ірраціональні рівняння з параметром зазвичай розв'язують аналітичними методами. Важливим кроком розв'язання є встановлення області допустимих значень, адже саме вона визначає, за яких умов рівняння може мати розв'язки. Характерною особливістю цього типу задач є можливість появи сторонніх коренів під час перетворень, зокрема при піднесенні обох частин рівняння до парного степеня. Тому після знаходження потенційних розв'язків обов'язково виконується перевірка із отриманою ОДЗ.

У ході розв'язування варто застосовувати рівносильні перетворення, що допомагають зменшити ризик виникнення сторонніх коренів. (Див. Таблиця 1)

Таблиця 1

Вид рівняння	*Рівносильний перехід*
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g(x)^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Введення параметра в ірраціональне рівняння робить задачу складнішою, оскільки область визначення та кількість розв'язків починають залежати від значення цього параметра. У цьому випадку необхідно розглядати різні підмножини значень параметра, адже для кожної з яких рівняння може мати різну кількість або тип розв'язків.

Отже, методика розв'язування ірраціональних рівнянь з параметром ґрунтується на:

1. визначенні області допустимих значень змінних і параметрів;
2. використанні рівносильних перетворень для спрощення рівнянь;
3. дослідженні залежності розв'язків від параметра через поділ задачі на окремі випадки;
4. обов'язковій перевірці кожного знайденого розв'язку.

Такий підхід дозволяє системно дослідити поведінку ірраціональних рівнянь залежно від параметра та запобігти помилкам у процесі розв'язування.

Приклад 2.5. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+2} = a + 2$.

ОДЗ: $a + 2 \geq 0$,

$a \geq -2$.

Піднесемо обидві частини даного рівняння до квадрату:

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = (a+2)^2,$$

$$x + 2 = a^2 + 4a + 4,$$

$$x = a^2 + 4a + 2.$$

Отже, *відповідь*:

- При $a \geq -2$ – $x = a^2 + 4a + 2$.
- При $a < -2$ – $x \in \emptyset$.

Приклад 2.6. Розв'язати рівняння $\sqrt{4x - x^2} = a + 1$.

Дане ірраціональне рівняння має розв'язки лише тоді, коли права частина даного рівняння – невід'ємне число. Тобто, при $a + 1 < 0$ – рівняння розв'язків не має.

ОДЗ: $a + 1 \geq 0$,

$a \geq -1$,

$a \in [-1;\ +\infty)$

$$4x - x^2 = (a+1)^2$$

$$4x - x^2 - (a+1)^2 = 0 \quad |\cdot(-1)$$

$$x^2 - 4x + (a+1)^2 = 0$$

$$D = 16 - 4(a+1)^2 = 4(-a^2 - 2a + 3)$$

1. $D > 0$,

$4(-a^2 - 2a + 3) > 0 \quad | \cdot (-\frac{1}{4})$

$a^2 + 2a - 3 < 0$

За теоремою Вієта:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -2, \\ a_1 \cdot a_2 = -3 \end{cases}$$

$a_1 = -3, \quad a_2 = 1.$

$a \in (-3; 1)$

Враховуючи ОДЗ:

$$\begin{cases} a \in (-3; 1) \\ a \in [-1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \quad a \in [-1; 1)$$

Корені рівняння матимуть вигляд:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-a^2 - 2a + 3}}{2} = 2 \pm \sqrt{-a^2 - 2a + 3}.$$

2. $D = 0$.

$a^2 + 2a - 3 = 0$

$a_1 = -3, \quad a_2 = 1.$

$$\begin{cases} a_1 = -3, \\ a_2 = 1, \\ a \in [-1; +\infty). \end{cases} \Rightarrow \quad a = 1.$$

$$x_1 = x_2 = \frac{4 \pm 0}{2} = 2.$$

Відповідь:

- *при* $a \in [-1; 1)$ – $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-a^2 - 2a + 3}$.
- *при* $a = 1$ – $x = 2$.
- *при* $a < -1$ – *розв'язків немає.*

2.2.2. Ірраціональні нерівності з параметром

Ірраціональною нерівністю зі змінною x та параметром a називають таку нерівність, в якій змінна знаходиться під знаком кореня.

Основним підходом до розв'язування ірраціональних нерівностей із параметрами є перетворення початкової нерівності на рівносильну систему раціональних нерівностей або на набір таких систем. Розглянемо кілька прикладів цього підходу. (Див. Таблиця 2)

Таблиця 2

Вид нерівності	*Рівносильний перехід*
$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Алгоритм розв'язування ірраціональних нерівностей із параметром

- визначити область допустимих значень як для змінної, так і для параметра;
- сформулювати умови, за яких обидві частини нерівності є невід'ємними, щоб можна було коректно виконати піднесення до степеня;
- піднести нерівність до парного чи непарного степеня (залежно від ситуації), перетворивши її на раціональну;
- розв'язати отриману раціональну нерівність за допомогою стандартних методів — аналізу знаків, методу інтервалів тощо;
- обрати лише ті розв'язки, які відповідають області визначення та дотримуються всіх накладених умов.

Приклад 2.7. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{a(3x+4a)} < x+2a$.

$$\begin{cases} x+2a>0, \\ a(3x+4a)\geq 0, \\ a(3x+4a)<(x+2a)^2. \end{cases}$$

Розв'яжемо третє рівняння системи:

$a(3x+4a)<(x+2a)^2$,

$3ax+4a^2-x^2-4ax-4a^2<0$,

$-ax-x^2<0, \quad |\cdot(-1)$

$x(a+x)>0$,

$$\begin{cases} x+2a>0, \\ a(3x+4a)\geq 0, \\ x(a+x)>0. \end{cases}$$

Розглянемо випадки:

1) $a=0$, тоді з першого рівняння системи маємо, що $x>0$;

2) $a<0$, в цьому випадку множини розв'язків даних нерівностей $x>-2a$ і $x\leq -\frac{4}{3}a$ не перетинаються. Отже, спільних розв'язків немає, тобто $x\in\emptyset$.

3) $a>0$, тоді матимемо

$$\begin{cases} x\geq -2a, \\ x\geq -\frac{4}{3}a, \\ (x+a)x>0, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x\geq -\frac{4}{3}a, \\ x<-a, \\ x>0. \end{cases}$$

Отже, $x\in\left[-\frac{4a}{3};\ -a\right)\cup(0;\ +\infty)$.

Відповідь:

- якщо $a<0$, то x $\in\emptyset$;
- якщо $a=0$, то x >0;
- якщо $a>0$, то x $\in\left[-\frac{4a}{3};\ -a\right)\cup(0;\ +\infty)$.

2.3. Показникові рівняння та нерівності з параметрами

2.3.1. Показникові рівняння з параметрами

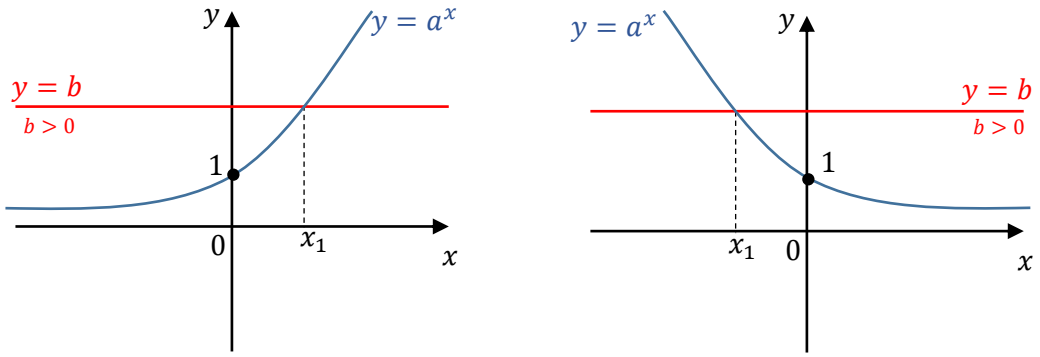
Рівняння зі змінною x і параметром a називають ***показниковим***, якщо змінна знаходиться в показнику степеня.

Наприклад: 1) $2^x = a$; 2) $3^{ax} = 3^{2x-1}$.

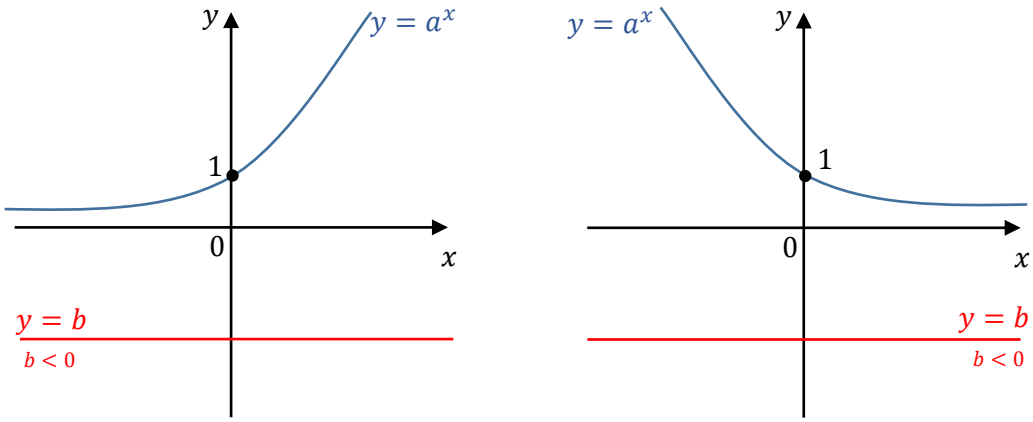
Показникові функції моделюють багато процесів у фізиці, хімії та біології, тому важливо навчити учнів працювати з ними та проводити необхідні дослідження. Елементи таких досліджень виникають під час розв'язування рівнянь із параметрами.

Нехай маємо показникове рівняння з параметром $a^x = b$. Дане рівняння:

1) має один корінь, якщо $b > 0$;



2) не має коренів, якщо $b \leq 0$.



Для показникових рівностей справджується теорема:

Теорема. **При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.**

Наслідок. **Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.**

При розв'язуванні показникових рівнянь та нерівностей потрібно знати властивості степеня з раціональним показником. (Див. Додаток 1)

Приклад 2.8. Розв'яжіть рівняння з параметром а:

$$2^{2x} - (2a + 1)2^x + a^2 + a = 0.$$

1. Дане рівняння – показникове. І змінна x, і параметр a можуть приймати будь-які дійсні значення.
2. Введемо заміну: $2^x = t$, де $t > 0$. Отримаємо квадратне рівняння відносно нової змінної t. Розв'яжемо утворене рівняння.

$$t^2 - (2a + 1)t + (a^2 + a) = 0,$$

$$a = 1, \quad b = -(2a + 1), \quad c = a^2 + a,$$

$D = (2a + 1)^2 - 4(a^2 + a) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 4a = 1 > 0,$

отже, квадратне рівняння при будь-яких значеннях параметра буде мати два різні корені:

$$t_1 = \frac{2a + 1 - 1}{2} = a, \quad t_2 = \frac{2a + 1 + 1}{2} = a + 1.$$

3. Повернемося до заміни.

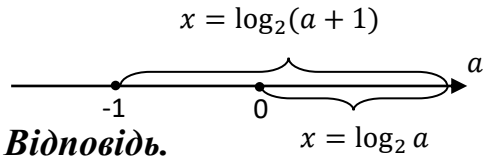
3.1 Коли з t_1 можна повернутися до заміни?

Тоді, коли $t_1 > 0$, тобто $t_1 = a > 0$; отже, якщо $a \in (0; +\infty)$, то повертаємось до заміни $2^x = a,\ log_2 2^x = log_2 a,\ x = log_2 a.$

3.2 Коли з t_2 можна повернутися до заміни?

Тоді, коли $t_2 > 0$, тобто $t_2 = a + 1 > 0$ для $a > -1$; отже, якщо $a \in (-1; +\infty)$, то повертаємось до заміни $2^x = a + 1,\ x = log_2(a + 1)$.

4. Позначимо знайдені розв'язки на прямій параметра та запишемо відповідь.



Відповідь.

1) Якщо $a \in (-\infty; -1]$, то $x \in \emptyset$;
2) якщо $a \in (-1; 0)$, то $x = log_2(a + 1)$;
3) якщо $a = 0$, то $x = 0$;
4) якщо $a \in (0; +\infty)$, $x = log_2 a,\ x = log_2(a + 1)$.

Приклад 2.9. Знайдіть найбільше ціле значення параметра a за якого рівняння $\left(\sqrt{3}\right)^{2x-a} - 9^{x+1} = 0$ має розв'язки.

$$\left(\sqrt{3}\right)^{2x-a} = 9^{x+1}$$

$$3^{\frac{1}{2}(2x-a)} = 3^{2(x+1)}$$

$$\frac{1}{2}(2x-a) = 2(x+1)$$

$$x - \frac{1}{2}a = 2x + 2$$

$$x = -2 - \frac{1}{2}a$$

$$4 < -2 - \frac{1}{2}a < 7$$

$$6 < -\frac{1}{2}a < 9 \quad |\cdot(-2)$$

$$-18 < a < -12$$

Відповідь: $-18 < a < -12$

Приклад 2.10. Розв'яжіть рівняння $25^x - (2a+1)5^x + a^2 + a = 0$. У відповідь запишіть найменше ціле значення параметра a, за якого рівняння має два корені.

$$25^x - (2a+1)5^x + a^2 + a = 0$$

$$5^{2x} - (2a+1)5^x + a^2 + a = 0$$

$$5^x = t, \qquad t > 0$$

$$t^2 - (2a+1) + a^2 + a = 0$$

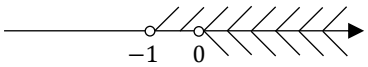
$$D = (2a+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 + a) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 4a = 1$$

$$t_1 = \frac{2a+1+1}{2} = \frac{2a+2}{2} = a + 1$$

$$t_2 = \frac{2a+1-1}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$$\begin{cases} a + 1 > 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -1 \\ a > 0 \end{cases}$$



$$a \in (0;\ +\infty)$$

Відповідь: *Найменше ціле значення параметра* $a = 1$.

2.3.2. Показникові нерівності з параметрами

Нерівності $0{,}2^x < 25,\ 2^x + 5^x > 1,\ 7^x > 2^x$ є прикладами показникових нерівностей.

Під час розв'язування більшості показникових нерівностей часто застосовують таку теорему.

Теорема.

- **При $a > 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 > x_2$;**
- **при $0 < a < 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 < x_2$.**

Пояснення теореми ґрунтується на властивості показникової функції: при $a > 1$ вона зростає, а при $0 < a < 1$ – спадає.

Наслідок.

- **Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$;**
- **якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.**

Приклад 2.11. За яких значень a нерівність $4^x - (a-4)2^x + 4 > 0$ виконується для будь яких дійсних значень x. У відповідь запишіть найбільше ціле значення параметра a.

$$2^{2x} - (a-4)2^x + 4 > 0$$

Заміна: $2^x = t, t > 0$.

$$t^2 - (a-4)t + 4 > 0$$

$$D = (a-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = a^2 - 8a + 16 - 16 = a^2 - 8a$$

Оскільки ми отримали дискримінант, з якого не можна визначити точного кореня, то перейдемо до іншого способу:

$$f(t) = t^2 - (a-4)t + 4$$

Сформулюємо тепер наше завдання таким чин: знайти за яких значень параметра a графік даної квадратичної функції на проміжку $(0; +\infty)$ розміщений над віссю t.

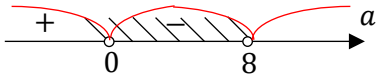
Це можливо у двох випадках:

1. $D < 0$

$$a^2 - 8a < 0$$

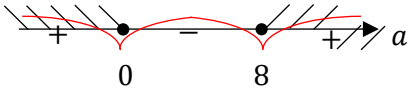
$$a(a-8) = 0$$

$$a = 0 \quad a = 8$$



$$a \in (0; 8)$$ +

2. $\begin{cases} D \geq 0 \\ x_в < 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$



$$a \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$$

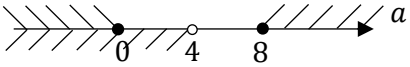
$$x_в = \frac{a-4}{2} < 0$$

$$a - 4 < 0$$

$$a < 4$$

$$f(0) = 0^2 - (a-4)0 + 4 = 4$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty) \\ a \in (-\infty; 4) \\ 4 \geq 0 \end{cases}$$



$$a \in (-\infty; 0]$$

Об'єднаємо наші випадки: $a \in (-\infty; 0] \cup (0; 8)$ або $a \in (-\infty; 8)$. Найбільшим цілим значенням із цього проміжку є число 7.

Відповідь: $a = 7$.

Приклад 2.11. Розв'яжіть нерівність $a^2 \cdot 4^{x+1} - 33a \cdot 2^x + 8 > 0$ з параметром a.

$$a^2 \cdot 4^{x+1} - 33a \cdot 2^x + 8 > 0$$

$$a^2 \cdot 4^x \cdot 4 - 33a \cdot 2^x + 8 > 0$$

$$4a^2 \cdot (2^2)^x - 33a \cdot 2^x + 8 > 0$$

$$4a^2 \cdot 2^{2x} - 33a \cdot 2^x + 8 > 0$$

Заміна: $2^x = t,\ t > 0.$

$$4a^2t^2 - 33at + 8 > 0$$

Якщо $a = 0$, то $4 \cdot 0^2 \cdot t^2 - 33 \cdot 0 \cdot t + 8 > 0$

$$8 > 0 \ \rightarrow \ x \in R$$

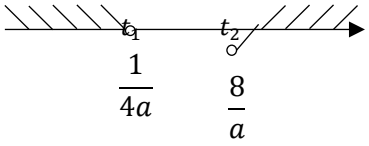
Якщо $a \neq 0$, то $4a^2t^2 - 33at + 8 > 0$

$$D = (-33a)^2 - 4 \cdot 4a^2 \cdot 8 = 1089a^2 - 128a^2 = 961a^2 = (31a)^2$$

$$t_1 = \frac{33a - 31a}{2 \cdot 4a^2} = \frac{2a}{8a^2} = \frac{1}{4a}$$

$$t_2 = \frac{33a + 31a}{8a^2} = \frac{64a}{8a^2} = \frac{8}{a}$$

І випадок: $t_1 < t_2$



$$\frac{1}{4a} < \frac{8}{a}$$

$$\frac{1}{4a} - \frac{8}{a} < 0$$

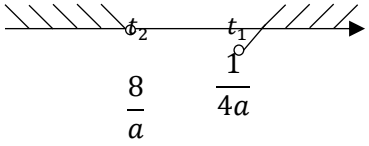
$$\frac{1 - 32}{4a} < 0$$

$$\frac{-31}{4a} < 0 \quad |\cdot(-1)$$

$$\frac{31}{4a} > 0$$

при $a > 0$, то $m \in \left(-\infty;\ \frac{1}{4a}\right) \cup \left(\frac{8}{a};\ +\infty\right)$

II випадок: $t_2 < t_1$



$$\frac{1}{4a} > \frac{8}{a}$$

$$\frac{1}{4a} - \frac{8}{a} > 0$$

$$\frac{1-32}{4a} > 0$$

$$\frac{-31}{4a} > 0 \quad |\cdot(-1)$$

$$\frac{31}{4a} < 0$$

при $a < 0$, то $m \in \left(-\infty;\ \frac{8}{a}\right) \cup \left(\frac{1}{4a};\ +\infty\right)$

<u>*Повертаємось до заміни*</u>: $2^x = t,\ t > 0$.

- якщо $a > 0$, то

$$\left[\begin{array}{c} 0 < t < \frac{1}{4a} \\ t > \frac{8}{a} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{c} 0 < 2^x < \frac{1}{4a} \\ 2^x > \frac{8}{a} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_2 2^x < \log_2 \frac{1}{4a} \\ \log_2 2^x > \log_2 \frac{8}{a} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x < \log_2 \frac{1}{4a} \\ x > \log_2 \frac{8}{a} \end{array}\right.$$

- якщо $a \leq 0$, то $t > 0$, $2^x > 0 \ \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$.

Відповідь:

- при $a \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}$;
- при $a > 0\ x \in \left(-\infty;\ \log_2 \frac{1}{4a}\right) \cup \left(\log_2 \frac{8}{a};\ +\infty\right)$.

2.4. Логарифмічні рівняння та нерівності з параметрами

2.4.1. Логарифмічні рівняння

Розглянемо найпростіше логарифмічне рівняння, яке має такий вигляд:

$$\log_a x = b,$$

де $a > 0, a \neq 1$.

При будь-якому дійсному значенні b рівняння має один єдиний розв'язок:

$$x = a^b.$$

Під час розв’язування логарифмічних рівнянь застосовують таку теорему.

Теорема. **Нехай $a > 0$, $a \neq 1$. Якщо $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$, і навпаки, якщо $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ і $x_1 = x_2$, то $\log_a x_1 = \log_a x_2$.**

Наслідок. **Нехай $a > 0$, $a \neq 1$. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне будь-якій із систем**

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов’язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x) > 0$ чи $g(x) > 0$, розв’язати легше.

Під час розв’язування логарифмічних рівнянь слід уміло застосовувати властивості логарифмів, а також правильно виконувати дії логарифмування та піднесення до степеня. (Див. Додаток 1)

Приклад 2.11. Для всіх значень параметра a розв’язати рівняння

$$\log_a(ax) \cdot \log_x(ax) = \log_{a^2} \frac{1}{a}$$

ОДЗ: $\begin{cases} ax > 0 \\ \frac{1}{a} > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

Застосувавши властивості логарифмів, запишемо рівняння в іншому вигляді:

$$(\log_a a + \log_a x) \cdot (\log_x a + \log_x x) = \frac{1}{2} \log_a \frac{1}{a}$$

$$(1+\log_a x)\cdot(\log_x a+1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)$$

$$(1+\log_a x)\cdot\left(\frac{1}{\log_a x}+1\right)=-\frac{1}{2}$$

Нехай $\log_a x=t$.

$$(1+t)\cdot\left(\frac{1}{t}+1\right)=-\frac{1}{2}\quad|\cdot 2t,\qquad t\neq 0$$

$$2t^2+5t+2=0$$

$$D=25-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9$$

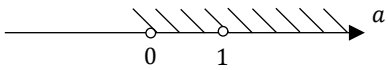
$$t_1=\frac{-5-3}{2\cdot 2}=-\frac{8}{4}=-2$$

$$t_2=\frac{-5+3}{2\cdot 2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Маємо: $log_a x=-2$ або $log_a x=-\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{a^2}$; $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$

Враховуємо ОДЗ:



Відповідь:

- якщо $a<0, a\neq 1$, то розв'язків немає;
- якщо $a\in(0;1)\cup(1;\infty)$, то $x=\frac{1}{a^2}$ або $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$

Приклад 2.12. Укажіть найменше ціле значення параметра a при якому рівняння $\log_5(x^2-3ax)=\log_5(6x-18a)$ не має коренів.

ОДЗ: $\begin{cases}x^2-3ax>0\\6x-18a>0\end{cases}$

$$x^2-3ax=6x-18a$$

$$x^2-3ax-6x+18a=0$$

$$x^2-(3a-6)x+18a=0$$

$$D=(3a-6)^2-4\cdot 18a=9a^2+36a+36-72a=9a^2-36a+36=$$

$$=(3a-6)^2$$

$$x_1 = \frac{3a + 6 + (3a - 6)}{2} = \frac{6a}{2} = 3a$$

$$x_2 = \frac{3a + 6 - (3a - 6)}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Оскільки в нас стоїть завдання знайти значення параметра a, при якому рівняння не має коренів, то перевіримо, коли дані корені x_1 і x_2 не задовольняють область допустимих значень.

Візьмемо рівняння (2) системи ОДЗ:

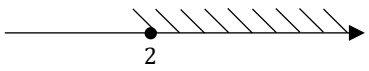
$$6x - 18a > 0$$

$$\begin{cases} 6 \cdot 3a - 18a \le 0 \\ 6 \cdot 6 - 18a \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0a \le 0 \\ 36 - 18a \le 0 \end{cases} \quad - \text{ виконується завжди}$$

$$-18a \le -36$$

$$a \ge 2$$



$$x \in [2;\ +\infty)$$

Найменшим цілим значенням даного проміжку є 2.

Відповідь: $x = 2$.

Приклад 2.13. Знайти найбільше значення параметра при якому рівняння $\log_{\sqrt{ax-6}}(2x^2 - 3x + 2) = 2\log_{ax-6}(x^2 + 2x - 4)$ має єдиний розв'язок

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x^2 + 2x - 4 > 0 \\ ax - 6 > 0 \\ ax - 6 \ne 1 \end{cases}$

$$\log_{(ax-6)^{\frac{1}{2}}}(2x^2 - 3x + 2) = 2\log_{ax-6}(x^2 + 2x - 4)$$

$$2\log_{ax-6}(2x^2 - 3x + 2) = 2\log_{ax-6}(x^2 + 2x - 4) \quad |:2$$

$$2x^2 - 3x + 2 = x^2 + 2x - 4$$

$$2x^2 - 3x + 2 - x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

За теоремою Вієта:

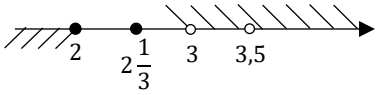
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 = 2,\ \ x_2 = 3$$

$x = 2$:

$$\begin{cases} 2a - 6 > 0 \\ 2a - 6 \neq 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} 3a - 6 \leq 0 \\ 3a - 6 = 1 \end{array}\right.$$

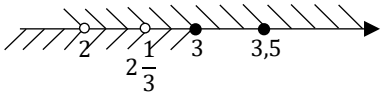
$$\begin{cases} a > 3 \\ a \neq 3{,}5 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} a \leq 2 \\ a = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \end{array}\right.$$



$x = 3$:

$$\begin{cases} 3a - 6 > 0 \\ 3a - 6 \neq 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} 3a - 6 \leq 0 \\ 3a - 6 = 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a > 2 \\ a \neq 2\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} a \leq 3 \\ a = 3{,}5 \end{array}\right.$$



$$a \in \left(2; 2\frac{1}{3}\right) \cup \left(2\frac{1}{3}; 3\right] \cup \{3{,}5\}.$$

Відповідь: $a \in \left(2; 2\frac{1}{3}\right) \cup \left(2\frac{1}{3}; 3\right] \cup \{3{,}5\}$.

Приклад 2.13. За якого найбільшого цілого значення параметра a корінь рівняння $\log_a x = \log_a(a - x)$ належить проміжку $x \in (1; 5)$.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ a - x > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$$x = a - x$$

$$2x = a$$

$$x = \frac{a}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} > 0 \\ a - \frac{a}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a > 0$$

$$1 < x < 5$$

$$1 < \frac{a}{2} < 5$$

$$2 < a < 10$$

Відповідь: $a \in (2; 10)$.

2.4.2. Логарифмічні нерівності

Теорема. При $a > 1$ нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$, виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 > x_2 > 0$; при $0 < a < 1$ нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$ виконується тоді й тільки тоді, коли $0 < x_1 < x_2$.

Справедливість цієї теореми випливає з того, що при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ – спадною.

Наслідок.

- **Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$ рівносильна системі**

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

- **Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$ рівносильна системі**

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Приклад 2.14. При яких значеннях a число 3 є розв'язком нерівності $\log_a(2x + 3) > 3$. У відповідь запишіть найбільше ціле значення параметра a.

$x = 3$:

$$\log_a(2 \cdot 3 + 3) > 3$$

$$\log_a 9 > 3$$

Перейдемо до нерівності:

$$\frac{1}{\log_9 a} > 3$$

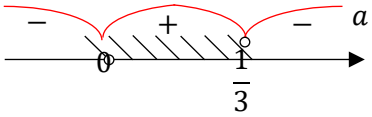
Заміна: $\log_9 a = t, \quad t \neq 0$

$$\frac{1}{t} > 3$$

$$\frac{1}{t} - 3 > 0$$

$$\frac{1-3t}{t} > 0$$

$$\begin{cases} 1-3t=0 \\ t \neq 0 \end{cases} \rightarrow \quad t = \frac{1}{3}$$



$$0 < t < \frac{1}{3}$$

$$0 < \log_9 a < \frac{1}{3}$$

$$\log_9 1 < \log_9 a < \log_9 9^{\frac{1}{3}}$$

$$1 < a < \sqrt[3]{9}$$

Оскільки нам потрібно вибрати найбільше ціле значення, то для цього оцінимо $\sqrt[3]{9}$:

$$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{27}$$

$$2 < \sqrt[3]{9} < 3$$

Отже, найменшим значенням буде 2.

Відповідь: $a = 2$.

Приклад 2.14. Розв'язати нерівність $\log_a(x-a) > \log_{\frac{1}{a}}(x+a)$ при всеможливих значеннях параметра a.

$$\log_a(x-a) > \log_{\frac{1}{a}}(x+a) \log_a 9 > 3$$

$$\log_a(x-a) > -\log_a(x+a)$$

$$\log_a(x-a) + \log_a(x+a) > 0$$

$$\log_a((x-a)(x+a)) > 0$$

$$\log_a(x^2-a^2) > 0$$

$$\log_a(x^2-a^2) > \log_a 1$$

ОДЗ: $\begin{cases} x-a>0 \\ x+a>0 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>a \\ x>-a \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$

1) $\begin{cases} a>1 \\ x^2-a^2>1 \end{cases}$

$x^2 > 1+a^2$

$|x| > \sqrt{1+a^2}$

ОДЗ: $x>0$

$\begin{cases} x > \sqrt{1+a^2} > \sqrt{a^2} = a \\ a>1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0<a<1 \\ x^2-a^2<1 \end{cases}$

$x^2 < 1+a^2$

$\begin{cases} a < x < \sqrt{1+a^2} \\ 0<a<1 \end{cases}$

<u>Відповідь:</u>

- при $a>1$ $\quad x \in (\sqrt{1+a^2};\ +\infty)$;
- при $0<a<1$ $\quad x \in \left(a;\ \sqrt{1+a^2}\right)$.

РОЗДІЛ 3 ВИКОРИСТАННЯ ІКТ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРАМИ

Сучасна школа працює в умовах цифрового освітнього простору, у якому інформаційно-комунікаційні технології є визначальними для забезпечення доступності, наочності та інтерактивності навчання. Застосування цифрових інструментів під час вивчення рівнянь і нерівностей з параметрами допомагає учням краще осягати абстрактні поняття, розвивати логічне та критичне мислення, а також підвищує їхню зацікавленість у вивченні математики.

Розглянемо основні аспекти застосування ІКТ:

- **Зростання ролі цифрових технологій у математичній освіті:** цифрові інструменти стають невід'ємною складовою освітнього процесу, вони дають можливість наочно подати абстрактні математичні поняття, моделювати складні явища та забезпечують доступ до великої кількості ресурсів.
- **Підвищення якості та швидкості розв'язання складних задач:** ІКТ-інструменти автоматизують рутинні обчислення та побудови, що дозволяє зосередитися на аналізі задачі та швидше знаходити ефективні шляхи її розв'язання.
- **Розвиток дослідницьких навичок через інтерактивність:** інтерактивні інструменти заохочують учнів і студентів до експериментування, формування гіпотез та їх перевірки, що сприяє розвитку дослідницького стилю мислення.

Існує низка програм і онлайн-сервісів, що широко застосовуються у математичній освіті:

– *WolframAlpha, Desmos* – онлайн-інструменти для побудови графіків і пошуку розв'язків;

– *Mathematica, Maple, Matlab* – професійні математичні системи, що використовуються у вищій освіті для складних обчислень;

– *LearningApps, Classtime, Google Forms* – платформи для створення тестів та організації контролю знань.

Серед усіх цих інструментів особливу увагу хочемо звернути саме на **GeoGebra**, адже вона є універсальною, зручною, доступною та максимально наочною програмою для вивчення рівнянь і нерівностей із параметрами.

GeoGebra – це динамічне математичне програмне забезпечення, яке поєднує в собі геометрію, алгебру, таблиці, графіки, статистику та аналіз у єдиному, зручному для користувача пакеті.

Одна з ключових переваг GeoGebra – це можливість миттєвої побудови графіків функцій та візуалізуації областей, у яких виконуються нерівності. Це дозволяє учням не просто отримати відповідь, а й зрозуміти, чому саме такий результат.

Особливо цінною для навчання параметричних задач є функція створення *повзунків для параметрів,* що дає змогу досліджувати, як зміна параметра впливає на графік функції чи область розв'язків. Також користувачі можуть переміщувати точки, змінювати коефіцієнти та досліджувати графіки.

Наприклад, при дослідженні рівняння

$$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

учні можуть у GeoGebra побудувати графік функції, додати повзунок параметра a та в інтерактивному режимі спостерігати, як змінюється кількість коренів залежно від його значення. Це сприяє кращому розумінню взаємозв'язку між графічним і алгебраїчним підходами.

Розглянемо приклад розв'язання ірраціональної нерівності, використовуючи класичний алгебраїчний підхід. Цей приклад допоможе краще зрозуміти складнощі та потенційні недоліки традиційного методу.

Приклад 3.1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x-a} > x + 1$ (традиційним методом)

Крок 1. Визначення області допустимих значень (ОДЗ).

Для ірраціональної нерівності необхідно, щоб вираз під коренем був не-від'ємним:

$$x - a \geq 0$$

$$x \geq a$$

Крок 2. Визначення можливих випадків

І випадок. $x + 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -1$

Тоді нерівність справджується на всій ОДЗ, бо $\sqrt{x-a} \geq 0$ завжди.

$$\begin{cases} x < -1, \\ x \geq a, \end{cases}$$

$$x \in [a;\ -1)$$

Цей випадок існує лише якщо $a \leq -1$.

ІІ випадок. $x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -1$

$$\begin{cases} x - a > (x+1)^2, \\ x \geq -1. \end{cases}$$

$$x - a > (x+1)^2$$

$$x - a > x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x + (1 + a) < 0$$

Розв'язуємо квадратне рівняння за допомогою дискримінанта:

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 + a) = 1 - 4 - 4a = -3 - 4a$$

Дискримінант може набувати різних значень, в залежності від значень параметра a. Розглянемо можливі варіанти.

І. $D < 0 \quad \Rightarrow \quad -3 - 4a < 0 \quad \Rightarrow \quad a > -\frac{3}{4}$

При $a > -\frac{3}{4}$ рівняння коренів не має.

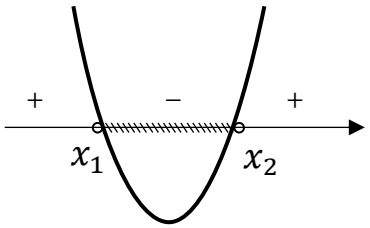
ІІ. $D = 0 \quad \Rightarrow \quad -3 - 4a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{3}{4}$

При $a = -\frac{3}{4}$ рівняння має один корінь $x = -\frac{1}{2}$.

ІІІ. $D > 0 \quad \Rightarrow \quad -3 - 4a > 0 \quad \Rightarrow \quad a < -\frac{3}{4}$

При $a < -\frac{3}{4}$ рівняння має 2 корені:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4a}}{2}$$



$$x \in \left(\frac{-1-\sqrt{-3-4a}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{-3-4a}}{2}\right)$$

Але тут потрібно також врахувати, що $x \geq -1$ і ОДЗ $x \geq a$.

Якщо $x \geq -1$ і $x \geq a$ то $\Rightarrow\ -1 \geq a\ \Rightarrow\ x \geq a \geq -1$.

Отже, якщо $-1 \leq a < -\frac{3}{4}$, то $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{-3-4a}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{-3-4a}}{2}\right)$.

Виявляється, що при $a < -1$ $\quad \frac{-1-\sqrt{-3-4a}}{2} < -1$

Тому для $a < -1$ розв'язком є:

$$\begin{cases} x \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{-3-4a}}{2};\ \dfrac{-1+\sqrt{-3-4a}}{2}\right) \\ x \in [a;\ -1) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$x \in \left(a;\ \frac{-1+\sqrt{-3-4a}}{2}\right)$$

Відповідь:

- Якщо $a \geq -\frac{3}{4}$, то рівняння розв'язків не має;
- Якщо $-1 \leq a < -\frac{3}{4}$, то $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{-3-4a}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{-3-4a}}{2}\right)$;
- Якщо $a < -1$, то $x \in \left(a;\ \frac{-1+\sqrt{-3-4a}}{2}\right)$.

Класичний алгебраїчний підхід до розв'язування ірраціональних нерівностей є доволі громіздким: він потребує ретельного опрацювання всіх можливих випадків, що підвищує ризик допущення арифметичних помилок, особливо при роботі з коренями. Крім того, перевірка отриманих результатів

нерідко є складною, а відсутність графічної складової ускладнює формування цілісного уявлення про задачу.

Щоб продемонструвати переваги цифрових інструментів, розглянемо, як швидко та наочно можна розв'язати цю ж ірраціональну нерівність у середовищі GeoGebra.

Приклад 3.2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x-a} > x+1$ (інноваційним методом, за допомогою програми GeoGebra)

Кроки розв'язання в GeoGebra:

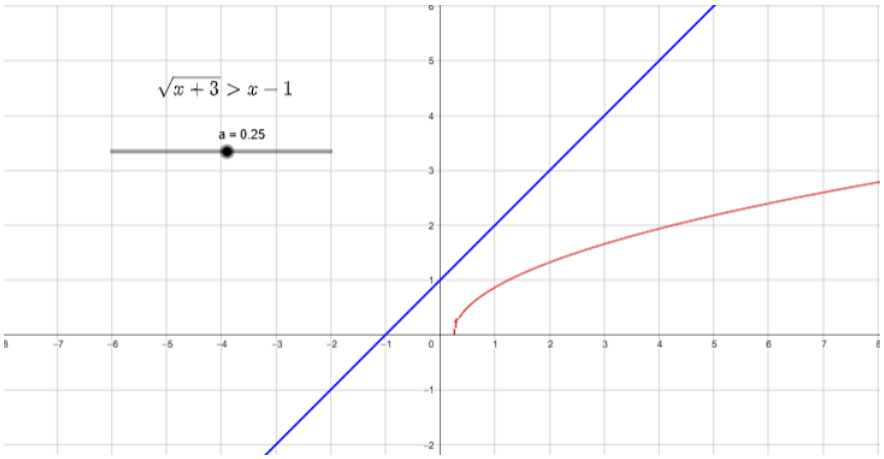
Крок 1. Введення функцій:

У полі введення GeoGebra вводимо дві функції:

$$f(x) = \sqrt{x-a} \quad \text{та} \quad g(x) = x+1.$$

Програма автоматично побудує їхні графіки.

Також додаємо повзунок для параметра a із діапазоном $-10 < a < 10$.



Крок 2. Область визначення: Вводимо ОДЗ (підкореневий вираз має бути невід'ємним), тобто

$$h: x \geq a$$

Крок 3. Графічний зміст нерівності: шукаємо всі точки, де значення кореня більше за значення прямої.

У графічному вигляді це означає:

- крива знаходиться вище прямої,
- ці точки формують певну область на координатній площині.

Вводимо:

$$b: y > x + 1$$

$$t: y < \sqrt{x - a}$$

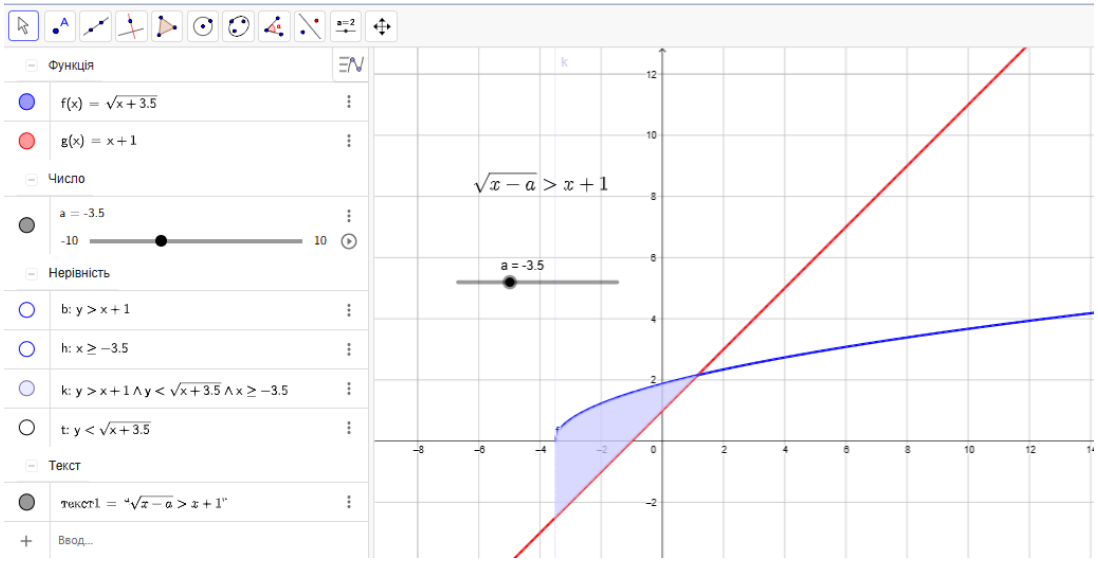
Крок 4. Побудова зафарбованої області: Створюємо спільну область:

$$k: b(x, y) \cap t(x, y) \cap h(x)$$

або

$$k: y > x + 1 \cap y < \sqrt{x - a} \cap x \geq a)$$

У результаті отримано синю заштриховану область – це і є графічний розв'язок нерівності.



Крок 5. Візуальний аналіз: Дивлячись на графіки, ми можемо чітко побачити інтервал, на якому графік функції $f(x)$ розташований вище графіку функції $g(x)$. Цей інтервал і є розв'язком нерівності.

Крок 6. Визначення точок перетину: За потреби можна використати інструмент "Перетин" для точного знаходження точок перетину графіків, якщо це потрібно для визначення кінцевих значень інтервалу.

Цей процес дозволяє не лише отримати відповідь, а й візуалізувати поведінку функцій. Замість громіздких алгебраїчних перетворень та обчислень дискримінанта, GeoGebra виконує більшу частину роботи автоматично. Завдяки цьому учні можуть зосередитися на аналізі графіків та інтерпретації результатів, значно мінімізуючи ризик допущення помилок, пов'язаних з обчисленнями.

Це порівняння чітко демонструє відмінності між двома підходами. Якщо традиційний метод базується на послідовних алгебраїчних перетвореннях, то GeoGebra пропонує динамічну графічну модель, що робить процес розв'язання більш інтуїтивним та зрозумілим.

Інтеграція GeoGebra в освітній процес приносить значні переваги, перетворюючи вивчення складних математичних тем на захоплюючий та ефективний досвід.

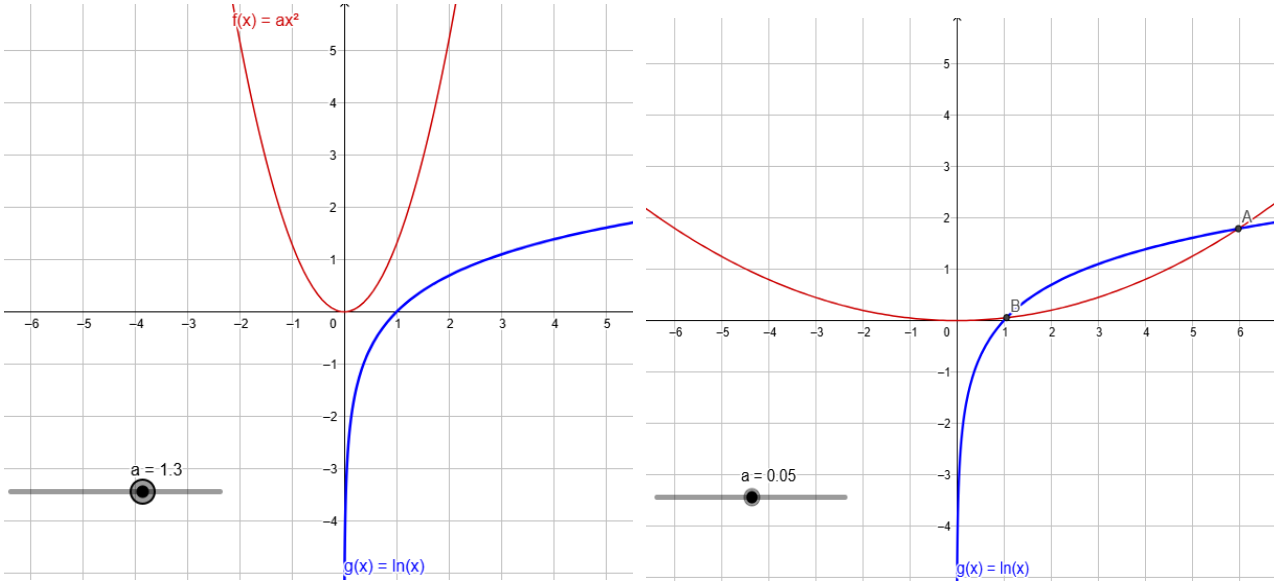
По-перше, графічна візуалізація допомагає краще сприймати абстрактні поняття та бачити зв’язок між алгебраїчним і геометричним підходами.

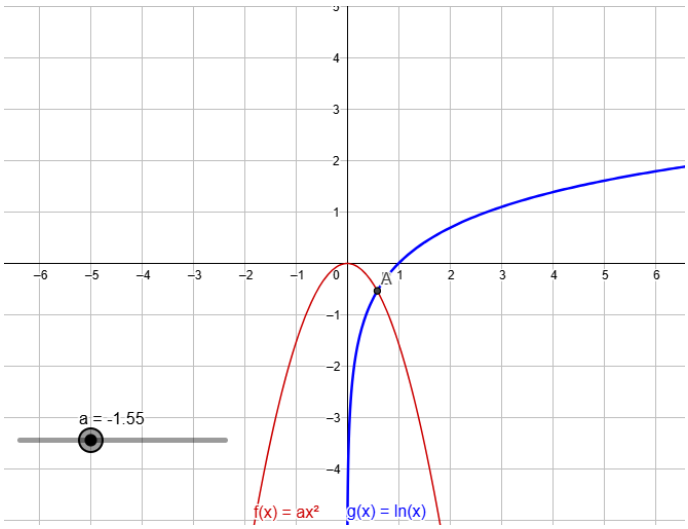
По-друге, інтерактивність, можливість змінювати параметри, створювати моделі та експериментувати роблять вивчення математики цікавішим.

По-третє, завдяки швидкому відображенню змін при модифікації параметрів, GeoGebra дозволяє проводити повноцінні математичні дослідження, вивчаючи поведінку функцій та розв'язків у різних умовах.

Розглянемо ще декілька прикладів рівнянь і нерівностей, розв’язаних у програмі GeoGebra.

Приклад 3.2. При яких значеннях параметра a рівняння $ax^2 = \ln x$ має один корінь?





Ефективність використання ІКТ у процесі навчання рівнянь і нерівностей з параметрами значною мірою визначається тим, наскільки органічно вони інтегровані в структуру уроку.

Найбільш результативними методичними прийомами є:

- *демонстраційні експерименти* з використанням графічних побудов;
- *дослідницькі завдання*, що передбачають перевірку гіпотез щодо умов розв'язності;
- *інтерактивні тренажери* для формування практичних навичок;
- *проєктна діяльність*, у межах якої учні створюють власні динамічні моделі в GeoGebra.

Застосування ІКТ значно підвищує ефективність навчання рівнянь і нерівностей з параметрами, робить цей процес більш наочним, інтерактивним та доступним для кожного учня.

Таким чином, GeoGebra є цінним активом сучасної математичної освіти, і її методично обґрунтоване впровадження може суттєво покращити підготовку майбутніх фахівців.

ВИСНОВОК

У магістерській роботі досліджено особливості вивчення рівнянь та нерівностей із параметрами в профільній школі. Актуальність теми зумовлена складністю параметричних задач, високими вимогами до аналітичного мислення учнів, а також важливою роллю цієї тематики у програмі НМТ, математичних олімпіадах і вступних випробуваннях. Необхідність удосконалення методики їх вивчення є очевидною в умовах сучасної цифровізації та переходу до компетентнісного навчання.

У ході дослідження було здійснено аналіз психолого-педагогічної, науково-методичної та спеціальної літератури, вивчено зміст чинних навчальних програм і підручників для профільних класів, що дозволило визначити основні труднощі, з якими стикаються учні під час роботи з параметрами. Встановлено, що найбільш поширеними проблемами є недостатнє розуміння рівносильних перетворень, складність визначення області допустимих значень, помилки в дослідженні залежності між параметром і кількістю розв’язків, а також брак візуалізації та дослідницьких завдань у навчальних матеріалах.

У роботі виконано класифікацію основних типів рівнянь і нерівностей із параметрами — квадратних, ірраціональних, показникових та логарифмічних — із детальним аналізом методів їх розв’язування. Розглянуто приклади, що демонструють характерні підходи до дослідження залежності результатів від значення параметра, а також типові помилки учнів і способи їх подолання.

Наукова новизна роботи полягає у теоретичному обґрунтуванні та практичному впровадженні методики використання цифрового середовища GeoGebra для вивчення рівнянь і нерівностей з параметрами. Розроблено й апробовано авторську систему методичних прийомів, яка поєднує графічні експерименти, інтерактивні моделі, завдання дослідницького характеру та динамічну візуалізацію параметричних залежностей. Запропонований підхід дозволяє доповнити традиційне навчання сучасними інструментами, сприяючи кращому засвоєнню матеріалу та розвитку критичного мислення учнів.

Практичне значення результатів визначається можливістю безпосереднього застосування розроблених матеріалів у навчальному процесі профільної школи. Запропонована система вправ, графічних моделей і методичних прийомів може бути використана вчителями під час уроків, індивідуальних занять, підготовки до НМТ та олімпіад, а також у роботі математичних гуртків.

Апробація результатів дослідження підтверджена виступом на університетській студентській науковій конференції, де було представлено й опубліковано тези «Використання ІКТ для розв’язування рівнянь та нерівностей з параметрами», що засвідчує практичну цінність отриманих матеріалів та їх відповідність сучасним освітнім тенденціям.

Підсумовуючи, можна стверджувати, що поставлена мета роботи досягнута, а всі визначені завдання виконано. Отримані результати підтверджують ефективність запропонованої методики й свідчать про перспективність подальшого використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні складних математичних тем.

.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолова Г.В., Ясінський В.В. Перші зустрічі з параметром. - К.: Факт, 2006. – 324с.
2. ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМИ GEOGEBRA ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ [Текст] / Уклад: І.В.Сушко — Нова Каховка: НКПТ, 2019. - 35 с.
3. Горнштейн П. І., Полонський В.Б., Якір М. С. Задачі з параметрами. — Тернопіль: Підручники і посібники; 2004. — 256 с.
4. Домanська І.П., Зеліско Г.В., Стахів Л.Л. Рівняння з параметрами: Методичні рекомендації.- Львів: Видавн. центр ЛДУ ім. І. Франка, 2005.
5. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. – Вид. 2, перероб. і доп. – Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. – 444 с. – Режим доступу: http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/
6. Клочко І.Я., Кравчук А.В. Квадратний тричлен та його застосування. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2020. — 80 с.
7. Кушнір В.А. Інноваційні методи навчання математики / Науковометодичний посібник. Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.
8. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закадів. Харків, 2015. 256 с.
9. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків, 2016. 240 с.
10. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків, 2017. 272 с.
11. Навчальні програми для 5-9 класів. URL: https://osvita.ua/doc/files/news/561/56128/5-programa-z-matematiki.docx

12. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є.П.Нелін. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 272 с.: іл.
13. Прус А.В., Швець В.О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник. - Житомир: Вид-во «Рута», 2016. 468 с.
14. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
15. Семенюк А.В., Кухаришина Н.Ю., Новікова А.Г. Захоплюючий світ параметрів. Перше знайомство. Частина 2 – Кам'янець-Подільський, 2019. – 90с.
16. Середовище GeoGebra. URL: https://www.geogebra.org/
17. Станжицький О.М. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина ІІІ «Функції в шкільному курсі математики» / Станжицький О.М., Собчук В.В., Кушніренко С.В., Курилко О.Б., Цань В.Б. – Київ, 2022. – 224 с.
18. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М. І.Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К.:Зодіак-ЕКО. 2006. – 272 с.